1-е занятие. Решение СЛАУ методом Гаусса
Линейная алгебра, прикл. матем., 1-й семестр

Решить системы линейных алгебраических уравнений (для каждой задачи сделать проверку):

$\boxed{\text{A1}}$ $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -1; \\ 2x_1 - 5x_2 = 12. \end{cases}$$

$\boxed{\text{A2}}$ $$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

$\boxed{\text{A3}}$ $$\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -6; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{A4}}$ $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4; \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -6; \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

$\boxed{\text{A5}}$ Сколько решений может иметь уравнение вида $ax = b$?

$\boxed{\text{A6}}$ Сколько решений может иметь система линейных алгебраических уравнений? Привести простые примеры.

Решить системы линейных алгебраических уравнений:

$\boxed{\text{A7}}$ $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2; \\ 2x_1 + 7x_3 = 5; \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 = 9. \end{cases}$$

$\boxed{\text{A8}}$ $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$\boxed{\text{A9}}$ $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1; \\ -5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 3x_4 = -2; \\ -8x_1 + 13x_2 + 11x_3 + 10x_4 = 2. \end{cases}$$

$\boxed{\text{A10}}$ $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 19; \\ -3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 9; \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 10; \\ 7x_1 - x_3 + 8x_4 = 29. \end{cases}$$

Домашнее задание № 1
Линейная алгебра, прикл. матем., 1-й семестр

Взять в библиотеке задачники:

Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре.

Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре.

Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии.

Решить следующие СЛАУ. Для совместных систем делать проверку.

$$\boxed{\text{K1a}}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{П693}}\quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8; \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7; \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{A1}}\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2; \\ 7x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -2; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{K1i}}\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{K1l}}\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

Для следующих неопределённых систем найти общее решение и какое-нибудь частное решение. Сделать проверку для частного решения.

$$\boxed{\text{A2}}\quad \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 9x_3 = -6; \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{A3}}\quad \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{K1q}}\quad \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$$

Строчные элементарные преобразования матриц

$C_i := C_i + \alpha C_j$ — прибавить к i-й строке j-ю строку, умноженную на α.
$C_i := \alpha C_i$ — умножить i-ю строку на число α, где $\alpha \neq 0$.
$C_i \leftrightarrow C_j$ — поменять местами i-ю строку с j-й.

Ступенчатые и приведённые матрицы

Матрицу называют *обобщённо ступенчатой* (или *строчно псевдотреугольной*), если в каждой её ненулевой строке найдётся хотя бы один ненулевой элемент, в столбце которого все нижестоящие элементы равны 0.

Матрицу называют *приведённой* (или *обобщённо диагональной*), если в каждой её ненулевой строке найдётся хотя бы один *ведущий элемент* — ненулевой элемент, в столбце которого все остальные элементы равны 0.

Очевидно, любая приведённая матрица является обобщённо ступенчатой.

Метод Гаусса

1. Сделать «прямой ход». Производя строчные элементарные преобразования над расширенной матрицей системы, привести матрицу системы к обобщённо ступенчатому виду.

2. Сделать вывод о числе решений системы. Если возникли уравнения вида «$0 = 1$», то **система несовместная** (не имеет решений), иначе **система совместная** (имеет хотя бы одно решение). Если система совместная и $r = n$, то **система определённая** (имеет ровно одно решение); если система совместная и $r < n$, то **система неопределённая** (имеет более одного решения). Здесь n — число неизвестных, r — **ранг системы**, т. е. число ненулевых строк матрицы системы, записанной в обобщённо ступенчатом виде.

3. Сделать «обратный ход» (для совместной системы). Производя строчные элементарные преобразования над расширенной матрицей системы, преобразовать матрицу системы к приведённому виду. Часто прямой ход соединяют с обратным, т. е. сразу преобразуют матрицу к приведённому виду (это «метод Жордана»).

4. Записать ответ. Если система неопределённая, то в каждой ненулевой строке выбрать по ведущему элементу. Выразить *связанные переменные* (соответствующие столбцам с ведущими элементами) через *свободные*. Записать общее решение в виде вектора. Сделать проверку хотя бы для одного частного решения.