3-е занятие. Умножение матриц
Линейная алгебра, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Вычислить $AB - BA$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти произведения:

$\boxed{\text{A2}}$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{A3}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A4}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{П799}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$. $\boxed{\text{П805}}$ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

$\boxed{\text{A5}}$ Умножить квадратную матрицу третьего порядка $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ слева и (отдельно) справа на следующие *элементарные матрицы*:

$$E_3(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A6}}$ Найти $f(A)$, если $f(t) = t^2 + 3t - 5$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A7}}$ Для следующих матриц A и B вычислить AB, A^T, B^T и B^TA^T:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A8}}$ Найти такую матрицу X, что

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание № 3
Линейная алгебра, прикл. матем., 1-й семестр

Вычислить степени матриц:

$$\boxed{800}\quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5 \qquad \boxed{802}\quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n.$$

$\boxed{827}$ Найти значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A1}}$ Выяснить, какое преобразование происходит с матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ при умножении слева на каждую из следующих матриц; при умножении справа на каждую из следующих матриц:

$$E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{3,1}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A2}}$ Пусть A — матрица размера $m \times n$, B — матрица размера $n \times k$, $B^1, \ldots, B^k$ — столбцы матрицы B (в этом упражнении верхние индексы *не* обозначают степени), $P^1, \ldots, P^m$ — векторы-столбцы, определённые следующими формулами:

$$P^1 = AB^1, \qquad \ldots \qquad P^k = AB^k.$$

Найти связь между матрицей AB и векторами-столбцами $P^1, \ldots, P^k$. Можно проверить вывод на конкретном примере (например, для $m = 3$, $n = 4$, $k = 2$).

Решить матричные уравнения (обязательно выполнять проверки!):

$\boxed{861}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$

$\boxed{\text{A3}}$ $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 \\ 2 & 11 & 3 \\ 10 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$

Умножение матриц. Теоретические упражнения

Символом Кронекера называют функцию $\delta\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, определённую следующим правилом: $\delta_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$ Например, $\delta_{4,4}=1$, $\delta_{1,2}=0$.

Вычислить следующие суммы:

$\boxed{\text{A1}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\delta_{k,2}k^3=\delta_{1,2}\cdot 1^3+\delta_{2,2}\cdot 2^3+\delta_{3,2}\cdot 3^3+\delta_{4,2}\cdot 4^3+\delta_{5,2}\cdot 5^3.$

$\boxed{\text{A2}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\delta_{k,7}k^3.$ $\boxed{\text{A3}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\delta_{2,k}\delta_{4,k}.$

Найти следующие суммы (ответ может зависеть от параметров p и q):

$\boxed{\text{A4}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\delta_{k,p}\cdot 2^k\quad(1\leqslant p\leqslant 5).$ $\boxed{\text{A5}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\delta_{k,p}\cdot 2^k\quad(1\leqslant p\leqslant 5).$

$\boxed{\text{A6}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\delta_{k,p}\cdot 2^k\quad(p>5).$ $\boxed{\text{A7}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\delta_{p,k}\delta_{q,k}\quad(1\leqslant p,q\leqslant 5).$

$\boxed{\text{A8}}$ *Единичная матрица* E порядка n определена правилом: (i,j)-й элемент матрицы E равен $\delta_{i,j}$. Записать матрицу E для $n=3$.

$\boxed{\text{A9}}$ Пусть E — единичная матрица порядка n. Пользуясь определением произведения матриц, доказать, что $AE=A$ для любой матрицы A размера $m\times n$ и $EB=B$ для любой матрицы B размера $n\times p$.

$\boxed{\text{A10}}$ Пусть $a_{i,j}$ и $b_{j,k}$ $(1\leqslant i,j,k\leqslant n)$ — некоторые числа, причём $a_{i,j}=0$ при $i>j$ и $b_{j,k}=0$ при $j>k$. Доказать, что если $i>k$, то

$$\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}b_{j,k}=0.$$

Подсказка: разбить сумму $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}$ на две суммы $\displaystyle\sum_{j=1}^{x}$ и $\displaystyle\sum_{j=x+1}^{n}$. Величину x нужно подобрать так, чтобы стало ясно, что все слагаемые нулевые.

$\boxed{\text{A11}}$ Квадратная матрица $A=(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ называется *верхнетреугольной*, если все её элементы, стоящие ниже главной диагонали, нулевые: при $i>j$ выполняется $a_{i,j}=0$. Доказать, что произведение двух верхнетреугольных матриц одинакового порядка также является верхнетреугольной матрицей.

Решение матричного уравнения: конспект

Найти такую матрицу X, что

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Решение. Из определения произведения матриц следует, что матрица X должна иметь размеры 2×2. Обозначим её элементы через $x_{i,j}$. Тогда матричное уравнение (1) можно записать так:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Из определения произведения матриц следует, что уравнение (2) равносильно системе из следующих четырёх уравнений:

$$\begin{array}{ll} 3x_{1,1} + 2x_{2,1} = 7; & -x_{1,1} + 5x_{2,1} = 9; \\ 3x_{2,1} + 2x_{2,2} = -3; & -x_{2,1} + 2x_{2,2} = 1. \end{array}$$

Имеем систему из двух уравнений для $x_{1,1}$ и $x_{2,1}$ и систему из двух уравнений для $x_{1,2}$ и $x_{2,2}$. Эти системы имеют одинаковые левые части, поэтому можно решать их одновременно, записав рядом столбцы правых частей:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 3 & 2 & 7 & -3 \\ -1 & 5 & 9 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{C_1 := C_1 + 3C_2 \\ C_2 := -C_2}}{\sim} \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & 17 & 34 & 0 \\ 1 & -5 & -9 & -1 \end{array}\right) \overset{\substack{C_1 := C_1/17 \\ C_1 \leftrightarrow C_2}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -5 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{C_1 := C_1 + 5C_2}{\sim} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Первый столбец в правой части соответствует системе для $x_{1,1}$ и $x_{2,1}$, а второй столбец в правой части — системе для $x_{1,2}$ и $x_{2,2}$:

$$\begin{cases} x_{1,1} & & = & 1; \\ & x_{2,1} & = & 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} & & = & -1; \\ & x_{2,2} & = & 0. \end{cases}$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & -3+0 \\ -1+10 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}. \quad \checkmark$$