4-е занятие. Матричные уравнения.
Вычисление обратной матрицы
Линейная алгебра, прикл. матем., 1-й семестр

Решить матричные уравнения:

$\boxed{\text{K I.7 b)}}$ $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{K I.8 a)}}$ $$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{K I.4 a)}}$ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{K I.3 b)}}$ $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Определение. Пусть A — матрица n-го порядка. Матрица X называется *обратной* к матрице A, если $AX = E_n$ и $XA = E_n$, где E_n — единичная матрица n-го порядка.

Замечание. Можно доказать, что если обратная матрица существует, то она единственна. Кроме того, из равенства $AX = E_n$ следует равенство $XA = E_n$.

Для каждой из следующих матриц выяснить, является ли она обратимой, и в случае обратимости вычислить обратную матрицу:

$\boxed{\text{A1}}$ $$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A2}}$ $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{K I.5 c)}}$ $$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решить матричное уравнение:

$\boxed{\text{A3}}$ $$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание № 4
Линейная алгебра, прикл. матем., 1-й семестр

Решить матричные уравнения:

$\boxed{\text{П864}}$ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{П865}}$ $$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{П863}}$ $$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{П868}}$ $$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}.$$ $\boxed{\text{П869}}$ $$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{К I.3 а)}}$ $$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти обратные матрицы:

$\boxed{837}$ $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$ $\boxed{836}$ $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{840}$ $$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$ $\boxed{845}$ $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{А1}}$ Найти обратные матрицы для следующих элементарных матриц:

$$E_3(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,3}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{А2}}$ Пусть A и B — обратимые матрицы одинакового порядка. Доказать, что матрица AB обратима, причём $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

$\boxed{\text{П872}}$ Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в данной матрице A:
а) переставить i-ю и j-ю строки?
б) i-ю строку умножить на число c, не равное нулю?
в) к i-й строке прибавить j-ю, умноженную на число c?
Если совершать аналогичные преобразования столбцов?