## 5-е занятие. Определители
## Линейная алгебра, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{П802 (из. Д. З. № 3)}}$ Вычислить $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

Решить матричное уравнение:

$\boxed{\text{A1}}$ $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$.

*Определитель: определение по индукции.*

$\boxed{\text{A2}}$ Вывести формулу для определителя третьего порядка («правило треугольников»).

$\boxed{\text{A3}}$ Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

*Некоторые свойства определителя.*

$\boxed{\text{A4}}$ Вычислить определитель из примера A3 несколькими способами: разложением по второй строке, с помощью строчных преобразований, с помощью столбцовых преобразований.

Вычислить следующие определители с помощью элементарных преобразований (строчных и столбцовых) и разложения по строке или столбцу с одним ненулевым элементом:

$\boxed{\text{A5}}$ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. $\boxed{\text{A6}}$ $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

Решить квадратные СЛАУ, используя формулы Крамера:

$\boxed{\text{A7}}$ $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 17; \\ x_1 + 3x_2 = -3. \end{cases}$

$\boxed{\text{A8}}$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 4; \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 7; \\ 2x_1 + x_3 = 8. \end{cases}$

# Домашнее задание № 5
# Линейная алгебра, прикл. матем., 1-й семестр

Решить матричные уравнения:

$\boxed{\text{П868}}$ $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{П869}}$ $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

С помощью элементарных преобразований вычислить определители:

$$\boxed{\text{П259}} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \qquad \boxed{\text{П262}} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\text{П203}}$ Пользуясь только определением, вывести формулу для вычисления определителя нижнетреугольной матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Сначала рассмотреть случай $n = 3$.

Решить системы линейных уравнений методом Крамера и сделать проверку:

$\boxed{\text{П22}}$ $\begin{cases} 2x + 5y = 1; \\ 3x + 7y = 2. \end{cases}$ $\boxed{\text{П23}}$ $\begin{cases} 2x - 3y = 4; \\ 4x - 5y = 10. \end{cases}$

$\boxed{\text{П26}}$ $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta; \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta. \end{cases}$

$\boxed{\text{П27}}$ $\begin{cases} x\,\mathrm{tg}\,\alpha + y = \sin(\alpha+\beta); \\ x - y\,\mathrm{tg}\,\alpha = \cos(\alpha+\beta). \end{cases}$ $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

$\boxed{\text{П74}}$ $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10; \\ 3x + 7y + 4z = 3; \\ x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$

$\boxed{\text{П75}}$ $\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3; \\ 3x - 3y + 2z = 2; \\ 4x - 5y + 2z = 1. \end{cases}$

## Некоторые свойства определителей

1. *Разложение по первой строке* (индуктивное определение).
   Для $n = 2$:
   $$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$
   Для $n = 3$:
   $$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$
   $$= a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

2. Определитель не меняется при транспонировании:
   $$\det A^T = \det A.$$
   Поэтому дальше будем формулировать свойства только для строк.

3. Дадим определение алгебраического дополнения. *Алгебраическим дополнением* $(i, j)$-го элемента квадратной матрицы $A$ называют определитель матрицы, которая получается из матрицы $A$ вычёркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Обозначают через $A_{i,j}$.

4. Разложение по $i$-й строке:
   $$\det A = a_{i,1} \cdot A_{i,1} + a_{i,2} \cdot A_{i,2} + \ldots + a_{i,n} \cdot A_{i,n},$$
   где $A_{i,j}$ — алгебраическое дополнение элемента, стоящего на месте $(i, j)$. На практике особенно важен случай, когда в $i$-й строке все элементы, кроме $a_{i,j}$, нулевые. Тогда
   $$\det A = a_{i,j} \cdot A_{i,j}.$$

5. Если $A \overset{C_i := C_i + \alpha C_j}{\to} B$, то $\det B = \det A$.

6. Если $A \overset{C_i \leftrightarrow C_j}{\to} B$, то $\det B = -\det A$.

7. Если $A \overset{C_i := \alpha C_i}{\to} B$, то $\det B = \alpha \det A$.