11-е занятие. Прямые на плоскости
Линейная алгебра, прикл. матем., 1-й семестр

Каноническое и параметрическое уравнения прямой

A1 Даны точка $M_0(x_0; y_0)$ и ненулевой вектор $\overrightarrow{a} = (p; q)$. Составить уравнение геометрического места точек M, таких что $\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{a}$.

A2 Прямая ℓ проходит через точку $M_0(1; 2)$ и имеет направляющий вектор $\overrightarrow{a} = (-3; 4)$. Составить её каноническое и параметрическое уравнения, сделать рисунок.

A3 Прямая ℓ проходит через точки $A(3; 1)$ и $B(2; 5)$. Составить её каноническое и параметрическое уравнения, сделать рисунок.

A4 Прямая ℓ проходит через точки $A(-1; 4)$ и $B(3; 4)$. Составить её каноническое и параметрическое уравнения, сделать рисунок.

A5 Составить уравнение прямой ℓ, которая проходит через точку $M_0(2; -3)$ и параллельна прямой m: $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-7}{5}$.

A6 Составить уравнение прямой ℓ, которая проходит через точку $M_0(2; 3)$ и перпендикулярна прямой m: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{5}$.

A7 Найти угол между прямыми ℓ_1: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-5}{3}$ и ℓ_2: $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y+2}{-12}$.

Общее уравнение прямой

A8 Даны точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\overrightarrow{n} = (A; B)$. Найти уравнение геометрического места таких точек M, что $\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$.

A9 Написать общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1; 3)$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{n} = (-2; 5)$. Сделать рисунок.

A10 Написать общее уравнение прямой ℓ: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-5}$.

A11 Написать общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(-7; 3)$ и $B(3; 5)$.

A12 Написать общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(4; -3)$ и $B(4; 2)$.

A13 Найти расстояние от точки $M(2; -1)$ до прямой ℓ: $4x - 3y + 7 = 0$.

A14 Найти угол между прямыми ℓ_1: $3x - 2y + 5 = 0$ и ℓ_2: $12x + 5y - 4 = 0$.

A15 Дано общее уравнение прямой: $3x - 5y - 4 = 0$. Найти её каноническое и параметрическое уравнения.

Домашнее задание № 11
Линейная алгебра, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{Ц 214}}$ Даны вершины треугольника: $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$. Составить уравнения:

1) трёх его сторон;

2) медианы, проведённой из вершины C;

3) высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

$\boxed{\text{Ц 215}}$ Написать уравнение прямой, соединяющей центр тяжести треугольника ABC с началом координат, причём координаты вершин такие: $(2;-1)$, $(4;5)$, $(-3;2)$.

$\boxed{\text{Ц 216}}$ Даны вершины треугольника: $A(-1;2)$, $B(3;-1)$, $C(0;4)$. Через каждую из них провести прямую, параллельную противолежащей стороне.

$\boxed{\text{Ц 271: 1)}}$ Вычислить угол между прямыми $2x+y-5=0$ и $6x-2y+7=0$.

$\boxed{\text{Ц 272}}$ Вычислить углы треугольника, стороны которого относительно прямоугольной системы координат даны уравнениями:

$$18x+6y-17=0, \quad 14x-7y+15=0, \quad 5x+10y-9=0.$$

$\boxed{\text{Ц 274}}$ Среди перечисленных ниже прямых найти все пары параллельных и перпендикулярных:

1) $3x-2y+7=0$; 2) $6x-4y-9=0$; 3) $6x+4y-5=0$;
4) $2x+3y-6=0$; 5) $x-y+8=0$; 6) $x+y-12=0$;
7) $-x+y-3=0$.

$\boxed{279}$ Через начало координат провести прямую параллельно прямой

$$4x+y-5=0.$$

$\boxed{\text{Ц 280}}$ Через точку $M(2;-1)$ провести прямую, параллельную прямой

$$4x-7y+12=0.$$

$\boxed{\text{Ц 281}}$ Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(-5;2)$ на прямую $4x-y+3=0$.

$\boxed{\text{Ц 218*}}$ Составить уравнения сторон треугольника, зная две его вершины $A(3;5)$ и $B(6;1)$ и точку пересечения его медиан $M(4;0)$.

Конспект 11-го занятия.
Прямые на плоскости
Линейная алгебра, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Даны точка $M_0(x_0; y_0)$ и ненулевой вектор $\overrightarrow{a} = (p; q)$. Составить уравнение геометрического места точек M, таких что $\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{a}$.

Решение. Поскольку вектор $\overrightarrow{a}$ ненулевой, то

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{a} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists t \in \mathbb{R}\colon \quad \overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{a}.$$

Выражая $\overrightarrow{M_0M}$ через радиус-векторы $\overrightarrow{OM_0}$ и $\overrightarrow{OM}$, можем записать равенство $\overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{a}$ в виде

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\overrightarrow{a} \qquad (t \in \mathbb{R}).}$$

Это *параметрическое уравнение прямой* (в векторной форме). Можно расписать это векторное равенство как систему из координатных равенств (обозначим координаты точки M через x и y):

$$\begin{cases} x = x_0 + pt; \\ y = y_0 + qt; \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Также можно записать условие $\overrightarrow{M_0M} \parallel \overrightarrow{a}$ в виде пропорциональности координат:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}. \tag{2}$$

Это *каноническое уравнение прямой.* Вектор $\overrightarrow{a} = (p, q)$ называют *направляющим вектором прямой.* Нужно понимать, что (1) и (2) — почти одно и то же. Если в уравнении (2) обозначить отношение через t и выразить x и y, то получим уравнение (1).

$\boxed{\text{A2}}$ Прямая ℓ проходит через точку $M_0(1; 2)$ и имеет направляющий вектор $\overrightarrow{a} = (-3; 4)$. Составить её каноническое и параметрическое уравнения, сделать рисунок.

Решение. Запись условия: $\ell \ni M_0(1; 3)$, $\ell \parallel \overrightarrow{a} = (-3; 4)$. Параметрическое уравнение:

$$\ell\colon \quad \begin{cases} x = 1 - 3t; \\ y = 2 + 4t; \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Каноническое уравнение:

$$\ell\colon \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{4}.$$

$\boxed{\text{А3}}$ Прямая ℓ проходит через точки $A(3;1)$ и $B(2;5)$. Составить её каноническое и параметрическое уравнения, сделать рисунок.

Решение. В качестве направляющего вектора $\overrightarrow{a}$ берём $\overrightarrow{AB} = (-1;4)$. В качестве M_0 возьмём точку A (можно взять B). Каноническое уравнение:

$$\ell\colon \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{4}.$$

Параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x = 3 - t; \\ y = 1 + 4t; \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{\text{А4}}$ Прямая ℓ проходит через точки $A(-1;4)$ и $B(3;4)$. Составить её каноническое и параметрическое уравнения, сделать рисунок.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (4;0)$. Каноническое уравнение:

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{0}.$$

Понимается в том смысле, что $y = 4$. Параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x = -1 + 4t; \\ y = 4; \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{\text{А5}}$ Составить уравнение прямой ℓ, которая проходит через точку $M_0(2;-3)$ и параллельна прямой $m\colon \dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-7}{5}$.

Решение. Условие $\ell \parallel m$ равносильно тому, что $\overrightarrow{a}_\ell \parallel \overrightarrow{a}_m$, где $\overrightarrow{a}_\ell$ и $\overrightarrow{a}_m$ — направляющие векторы прямых ℓ и m, соответственно. Нам нужен какой-нибудь ненулевой вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{a}_m$. Можно взять просто $\overrightarrow{a}_\ell = \overrightarrow{a}_m$.

$$\ell\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{5}.$$

$\boxed{\text{A6}}$ Составить уравнение прямой ℓ, которая проходит через точку $M_0(2;3)$ и перпендикулярна прямой m: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{5}$.

Решение. Условие $\ell \perp m$ равносильно условию $\vec{a}_\ell \perp \vec{a}_m$. Таким образом, в качестве $\vec{a}_\ell$ можно взять любой ненулевой вектор, перпендикулярный вектору $\vec{a}_m = (3;5)$. Например, $\vec{a}_\ell = (5;-3)$.

$$\ell\colon \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{-3}.$$

$\boxed{\text{A7}}$ Найти угол между прямыми $\ell_1\colon \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-5}{3}$ и $\ell_2\colon \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y+2}{-12}$.

Решение. Найдём cos угла между направляющими векторами $\vec{a_1} = (4;3)$ и $\vec{a_2} = (-5;12)$:

$$\cos(\widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}}) = \frac{20-36}{5\cdot 13} = -\frac{16}{65}.$$

В задаче спрашивается угол между прямыми (острый).

$$\cos(\widehat{\ell_1, \ell_2}) = |\cos(\widehat{\vec{a_1}, \vec{a_2}})| = \frac{16}{65}.$$

Общее уравнение прямой

$\boxed{\text{A8}}$ Даны точка $M_0(x_0;y_0)$ и вектор $\vec{n} = (A;B)$. Найти уравнение геометрического места таких точек M, что $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$.

Решение. Условие $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ равносильно соотношению $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Можно выразить вектор $\overrightarrow{M_0M}$ через радиус-векторы:

$$(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}) \cdot \vec{n} = 0.$$

Подставим в это уравнение координаты точки $M(x,y)$, точки $M_0(x_0,y_0)$ и вектора $\vec{n} = (A,B)$:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0.$$

Это *общее уравнение прямой*, которая задана точкой $M_0(x_0,y_0)$ и вектором нормали $\vec{n} = (A,B)$.

$\boxed{\text{A9}}$ Написать общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;3)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (-2;5)$. Сделать рисунок.

Решение. Запись условия: $\ell \ni M_0(-1;3)$, $\ell \perp \vec{n} = (-2;5)$.

$$-2(x+1) + 5(y-3) = 0.$$

После упрощения:
$$2x - 5y + 17 = 0.$$

$\boxed{\text{A10}}$ Написать общее уравнение прямой ℓ: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-5}$.

Решение. $-5(x-3) - 2(y+2) = 0$. После упрощения: $5x + 2y - 11 = 0$.

$\boxed{\text{A11}}$ Написать общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(-7;3)$ и $B(3;5)$.

Решение. Сначала пишем каноническое уравнение:
$$\frac{x+7}{10} = \frac{y-3}{2}.$$

Потом преобразуем в общее уравнение:
$$x + 7 = 5(y-3), \qquad x - 5y + 22 = 0.$$

$\boxed{\text{A12}}$ Написать общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;-3)$ и $B(4;2)$.

Решение. Пишем каноническое уравнение:
$$\frac{x-4}{0} = \frac{y+3}{5}.$$

Это уравнение понимается в том смысле, что $x - 4 = 0$. Это и есть общее уравнение прямой:
$$x - 4 = 0.$$

$\boxed{\text{A13}}$ Найти расстояние от точки $M(2;-1)$ до прямой ℓ: $4x - 3y + 7 = 0$.

Решение. Используем готовую формулу расстояния от точки $M(x,y)$ до прямой ℓ: $Ax + By + C$:
$$d(M,\ell) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В нашем примере:
$$d(M,\ell) = \frac{|8 + 3 + 7|}{5} = \frac{18}{5}.$$

$\boxed{\text{A14}}$ Найти угол между прямыми $\ell_1\colon 3x-2y+5=0$ и $\ell_2\colon 12x+5y-4=0$.

Решение. Найдём косинус угла между векторами нормалей к прямым:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}) = \frac{36-10}{4\cdot 13} = \frac{1}{2}.$$

Угол между прямыми равен (острому) углу между перпендикулярами к этим прямым, поэтому

$$\cos(\widehat{\ell_1, \ell_2}) = |\cos(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}})| = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\widehat{\ell_1, \ell_2} = \frac{\pi}{3}$.

$\boxed{\text{A15}}$ Дано общее уравнение прямой: $3x-5y-4=0$. Найти её каноническое и параметрическое уравнения.

Решение. Нужно найти направляющий вектор прямой и какую-нибудь точку, лежащую на прямой. В качестве направляющего вектора можно взять любой ненулевой вектор, перпендикулярный вектору нормали $\overrightarrow{n}=(3;-5)$. Например, $\overrightarrow{a}=(5;3)$. Точку на прямой можно угадать: $A(3;1)$.

$$\ell\colon \frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{3}.$$