Контрольная работа № 1, вариант № 555
Алгебра и геометрия, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса-Жордана. В случае неопределённой системы найти общее и какое-нибудь частное решения; сделать проверку для частного решения.

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 5x_3 = 7 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ -12x_1 - 2x_2 - 7x_3 + x_4 = -10 \end{cases}$$

$\boxed{\text{A2}}$ Для следующей матрицы A найти её обратную:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A3}}$ Решить систему линейных алгебраических уравнений, используя форулы Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ - 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{A4}}$ Для следующей матрицы A найти её обратную через матрицу алгебраических дополнений:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Образец оформления решения.

Контр. раб. № 1
Студентов И. О., группа 1.13. Вариант № 555

$\boxed{\text{A1}}$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 7 & 1 & 5 & 0 & 7 \\ -3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ -12 & -2 & -7 & 1 & -10 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} C_2 := C_2 + C_1 \\ C_4 := C_4 + 2C_1 \end{array}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & \boxed{1} & 5 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} C_2 := C_2 - 2C_3 \\ C_4 := C_4 - C_3 \end{array}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & \boxed{1} & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система совместная, неопределённая ($n = 4$, $r = 2$).

$$x_2 = -7x_1 - 5x_3 + 7;$$
$$x_4 = -2x_1 - 3x_3 + 4.$$

Ответ (общее решение):

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -7x_1 - 5x_3 + 7 \\ x_3 \\ -2x_1 - 3x_3 + 4 \end{pmatrix} \qquad (x_1, x_3 \in \mathbb{R}).$$

Частное решение (при $x_1 = 0$, $x_3 = 1$):

$$x_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка для ч. р.:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & + & 2 & + & 5 & + & 0 & = & 7 & \checkmark \\
0 & - & 2 & + & 1 & + & 2 & = & 1 & \checkmark \\
0 & + & 0 & + & 3 & + & 1 & = & 4 & \checkmark \\
0 & - & 4 & - & 7 & + & 1 & = & -10 & \checkmark
\end{array}
$$

A2

$$
(A|E_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
4 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\underset{\sim}{\begin{array}{c} C_3 := C_3 - C_2 \\ C_2 := C_2 - C_4 \\ C_4 := C_4 - C_1 \end{array}}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\underset{\sim}{\begin{array}{c} C_1 := C_1 - 3C_2 \\ C_3 := C_3 - C_1 \\ C_4 := C_4 + C_1 \end{array}}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 3 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\underset{\sim}{C_1 := C_1 - C_3}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
\underset{\sim}{\begin{array}{c} C_3 := C_3 - C_1 \\ C_4 := C_4 - C_1 \end{array}}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2
\end{array}\right) = (E_4|A^{-1}).
$$

Ответ:

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 2 & -1 \\
-2 & 2 & 1 & -2
\end{pmatrix}
$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -2+3-1 & -2+2 & 4-3-1 \\ 3-1-2 & -3+3-1+2 & -3+2+1 & 6-3-1-2 \\ 4-2-2 & -4+4-2+2 & -4+4+1 & 8-4-2-2 \\ 3-1-2 & -3+2-1+2 & -3+2+1 & 6-2-1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \checkmark$$

$\boxed{\text{A3}}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} \overset{C_1 := C_1 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 12 \\ 0 & -3 & -4 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -20 + 36 = 16; \qquad \Delta \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_3 := C_3 - 2C_2 \\ C_2 := C_2 - 2C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -12 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 12 = 12$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} \overset{C_1 := C_1 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 12 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 12 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 12 - 24 = -12$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \overset{C_1 := C_1 - 2C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 - 9 = 1$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}; \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{16}.$$

Ответ:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{3}{2} & - & \frac{3}{4} & + & \frac{1}{4} & = & 1 & \checkmark \\ 0 & + & \frac{9}{4} & - & \frac{1}{4} & = & 2 & \checkmark \\ \frac{3}{4} & + & \frac{3}{2} & - & \frac{1}{4} & = & 2 & \checkmark \end{array}$$

$\boxed{\text{А4}}$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 42 - 30 - 48 + 24 = -12; \qquad \det A \neq 0.$$

Вычислим теперь все алгебраические дополнения:

$$\hat{a}_{1,1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3;$$

$$\hat{a}_{1,2} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -(24 - 30) = 6;$$

$$\hat{a}_{1,3} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 24 = -3;$$

$$\hat{a}_{2,1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(-8 - 14) = 22;$$

$$\hat{a}_{2,2} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12;$$

$$\hat{a}_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -(0 + 6) = -6;$$

$$\hat{a}_{3,1} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 8 = -13;$$

$$\hat{a}_{3,2} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6;$$

$$\hat{a}_{3,3} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3.$$

Матрица алгебраических дополнений для матрицы A имеет вид:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 22 & -12 & -6 \\ -13 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 22 & -13 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 22 & -13 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -6-6 & 12-12 & -6+6 \\ -9+24-15 & 66-48-30 & -39+24+15 \\ -18+42-24 & 132-84-48 & -78+42+24 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \checkmark$$