Мех.-мат., Алгебра, 1-й семестр
1-е занятие. Матрицы

$\boxed{\text{A1}}$ Перемножить матрицы:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A2}}$ Вычислить произведения $A(BC)$ и $(AB)C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{ФСс 468}}$ Вычислить $AB - BA$, если

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$\boxed{\text{A3}}$ Найти произведения:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boxed{799}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3, \qquad \boxed{805}\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n.$$

$\boxed{\text{A4}}$ Умножение слева и справа на элементарные матрицы.

$\boxed{\text{A5}}$ Найти $f(A)$, если $f(t) = t^2 + 3t - 5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A6}}$ Символ Кронекера.

$$\sum_{j=1}^{10} 2^j \delta_{4,j}, \qquad \sum_{j=1}^{10} 3^j \delta_{12,j}, \qquad \sum_{j=1}^{10} \delta_{2,k}\delta_{k,3}, \qquad \sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10} \delta_{2,j}\delta_{j,k} \cdot 2^j \cdot 3^k.$$

Домашнее задание по алгебре № 1
Мех.-мат., 1-й семестр

Задачи на первой странице взяты из
"Сборника задач по линейной алгебре" под ред. И. В. Проскурякова.

$$\boxed{790}\ \begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \qquad \boxed{791}\ \begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}.$$

$\boxed{796}$ Вычислить $(AB)C$ и $A(BC)$, если

$$A = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Вычислить степени матриц:

$$\boxed{800}\ \begin{pmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}^5 \qquad \boxed{802}\ \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n.$$

$\boxed{827}$ Найти значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ от матрицы

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}.$$

Ответы:

$$\boxed{790}\ \begin{pmatrix}1 & 5 & -5\\ 3 & 10 & 0\\ 2 & 9 & -7\end{pmatrix}, \qquad \boxed{791}\ \begin{pmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{pmatrix},$$

$$\boxed{800}\ \begin{pmatrix}304 & -61\\ 305 & -62\end{pmatrix}, \qquad \boxed{827}\ f(A) = \begin{pmatrix}21 & -23 & 15\\ -13 & 34 & 10\\ -9 & 22 & 25\end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A1}}$ Пусть

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, какое преобразование происходит с произвольной квадратной матрицей 3-го порядка при умножении слева на матрицу U_1; при умножении справа на матрицу U_1, и т. д.

$\boxed{\text{A2}}$ Пусть A, B, C — квадратные матрицы одинакового порядка, причём матрица B является обратной слева к A, а матрица C является обратной справа к A:

$$BA = E, \qquad AC = E.$$

Доказать, что $B = C$.

$\boxed{\text{A3}}$ Квадратная матрица A порядка n называется нижнетреугольной, если для любых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ из $i < j$ следует $A_{ij} = 0$. Доказать, что произведение нижнетреугольных матриц — нижнетреугольная матрица.

$\boxed{\text{A4}}$ Упростить:

$$\sum_{k=1}^{10} 2^k \delta_{3,k}, \qquad \sum_{k=1}^{10} \frac{\delta_{p,k}}{k^2+1}, \qquad \sum_{k=1}^{10} \delta_{2,k}\delta_{k,7}, \qquad \sum_{k=1}^{10} \delta_{i,k}\delta_{k,3}, \qquad \sum_{k=1}^{10} \delta_{i,k}\delta_{k,j}.$$

$\boxed{\text{A5}}$ Пусть $B \in M_n(\mathbb{R})$, причём элементы матрицы B определены формулой $B_{ij} = \delta_{i,j+1}$.

1. Найти B^2, где $k \in \mathbb{N}$ (сначала взять $n = 3$, затем в общем виде).

2. Найти общую формулу для элементов матрицы B^k и доказать её методом мат. индукции.

3. Найти правило, по которому преобразуется произвольная матрица A при умножении на B слева; при умножении на B справа. (Сначала взять $n = 3$ и найти BA и AB для какой-нибудь конкретной матрицы A, затем в общем виде.)

$\boxed{\text{A6}}$ Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, причём элементы матрицы A определены формулой

$$A_{ij} = \delta_{i+j,n+1}.$$

Для $n = 3, 4$ выписать A и вычислить A^2. Найти A^2 для произвольного n, пользуясь свойствами символа Кронекера.