Мех.-мат. Алгебра, 1-й семестр
2-е занятие. Решение СЛАУ методом Гаусса

$\boxed{\text{A1}}$ Решить линейные уравнения:

$$3x = 5, \qquad 0x = 3, \qquad 0x = 0.$$

Решить системы линейных уравнений:

$$\boxed{\text{A2}} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

$x = (-1, 2, 5)^T$.

$$\boxed{\text{A3}} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -23 \\ 5x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 12 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 18 \end{cases}$$

$x = (-2, 1, 3)^T$.

$$\boxed{\text{A4}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -5 & 6 & 7 & 3 \\ -8 & 13 & 11 & 10 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

решений нет

$$\boxed{\text{A5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 7 & 0 \\ 5 & -1 & -4 & 4 \\ 7 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 19 \\ 9 \\ 10 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{ФС 398}} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Ответ: $(x_1, x_2, 2x_2 - x_1, 1)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Решить матричное уравнение:

$$\boxed{\text{A6}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 7 & 3 & 13 \\ 7 & 6 & 19 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание по алгебре № 2
Мех.-мат., 1-й семестр

Матрица называется *строчно псевдотреугольной* (или ступенчатой), если в каждой её ненулевой строке найдётся хотя бы один ненулевой элемент, в столбце которого все нижестоящие элементы равны нулю.

Матрица называется *строчно псевдодиагональной* (или приведённой), если в каждой её ненулевой строке найдётся хотя бы один ненулевой элемент, в столбце которого все остальные элементы равны нулю.

Для решения СЛАУ (систем линейных алгебраических уравнений) используется **метод Гаусса**. Решение СЛАУ методом Гаусса можно условно разбить на три этапа.

1. "Прямой ход метода Гаусса". Производя строчные элементарные преобразования над расширенной матрицей системы, привести матрицу системы к строчно псевдотреугольному виду.

2. Сделать вывод о числе решений системы. Если возникли уравнения вида "$0 = 1$", то **система несовместная** (не имеет решений), иначе **система совместная** (имеет хотя бы одно решение). Если система совместная и $r = n$, то **система определённая** (имеет ровно одно решение); если система совместная и $r < n$, то **система неопределённая** (имеет более одного решения).

Здесь n — число неизвестных, r — число ненулевых строк матрицы системы, приведённой к псевдотреугольному виду (ранг системы).

3. "Обратный ход метода Гаусса" (для совместной системы). Производя строчные элементарные преобразования над расширенной матрицей системы, привести матрицу системы к строчно псевдодиагональному виду. Записать ответ. Сделать проверку (хотя бы для одного частного решения).

Во многих случаях можно сразу приводить матрицу к строчно псевдодиагональному (приведённому) виду.

Матричные уравнения вида $AX = B$, где A — невырожденная квадратная матрица, решают следующим образом: к матрице A приписывают справа матрицу B, затем строчными элементарными преобразованиями приводят матрицу A к единичной; тогда на месте матрицы B получается искомая матрица X:

$$(A|B) \sim (E|X).$$

(Задачи взяты из сборника задач по линейной алгебре под редакцией Проскурякова.)

Решить СЛАУ и сделать проверку:

$$\boxed{693}\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

Ответ: $(3, 2, 1)$.

$$\boxed{691}\ \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

Ответ: общее решение:

$$(x_1, x_2, 1 - 3x_1 - 4x_2, 1), \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R};$$

частное решение: $(-1, 1, 0, 1)$.

$$\boxed{692}\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Ответ: система несовместна.

$$\boxed{699}\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Ответ: общее решение:

$$(x_1, x_2, -1 - 8x_1 + 4x_2, 0, 1 + 2x_1 - x_2), \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R};$$

частное решение: $(1, 2, -1, 0, 1)$.

$\boxed{864}$ Решить матричное уравнение и сделать проверку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$