Мех.-мат. Алгебра, 1-й семестр
7-е занятие. Комплексные числа

$\boxed{1}$ Найти сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел:

$$z_1 = 8 - i, \qquad z_2 = 2 + 3i.$$

$\boxed{2}$ Решить систему линейных уравнений и сделать проверку:

$$\begin{cases} (1-2i)z_1 & + & (3+i)z_2 & = & 4+2i, \\ (2+3i)z_1 & + & (3-i)z_2 & = & 12+2i. \end{cases}$$

$\boxed{3}$ Найти квадратные корни из комплексного числа $z = 5 - 12i$.

$\boxed{4}$ Решить квадратное уравнение. Проверить соотношения Виета.

$$z^2 + (-1+2i)z + (1-7i) = 0.$$

$\boxed{5}$ Перевести в тригонометрическую форму:

$$a)\ 2-2i, \qquad b)\ -1+\sqrt{3}i, \qquad c)\ -3+4i.$$

$\boxed{6}$ Перевести в тригонометрическую форму:

$$1 + \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1 - i\,\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

$\boxed{7}$ Пользуясь тригонометрической формой, упростить выражение:

$$\frac{(-\sqrt{3}+1)^5}{(1-i)^4}.$$

$\boxed{8}$ Найти все корни степени 4 из числа $-8 + 8\sqrt{3}i$ и отметить их на комплексной плоскости.

$\boxed{9}$ Корни из единицы степени 3 (решения уравнения $z^3 = 1$).

$\boxed{10}$ Используя формулу Муавра и формулу бинома Ньютона, выразить $\cos 6\alpha$ и $\sin 6\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

$\boxed{11}$ Используя формулу Эйлера и формулу бинома Ньютона, представить $\sin^5\alpha$ в виде линейной комбинации функций вида $\sin k\alpha$, $k = 1, \ldots, 5$.

Упражнения по теме “Комплексные числа”

$\boxed{1}$ С помощью формул Крамера решить систему линейных уравнений. Сделать проверку.

$$\begin{cases} (3-2i)z_1 + (1+i)z_2 = 7-i, \\ (5-i)z_1 + 2iz_2 = 10+4i. \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Решить квадратные уравнения. Проверить для их корней соотношения Виета:

$$1)\ z^2 + (2+7i)z + (-20+4i) = 0;$$

$$2)\ z^2 + (-7-2i)z + (15+5i) = 0.$$

$\boxed{3}$ Пользуясь тригонометрической формой, вычислить:

$$1)\ (1-i)^7 + (1+i)^7, \qquad 2)\ \frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i\sqrt{3})^6}.$$

Можно также сделать проверку, возводя в степень по формуле бинома Ньютона.

$\boxed{4}$ Используя тригонометрическую форму, найти: 1) все корни 4-й степени из -16; 2) все корни 3-й степени из $-8i$. В каждом случае отметить корни на комплексной плоскости и записать в алгебраической форме. Для одного из корней сделать проверку.

$\boxed{5}$ Найти все корни из 1 степени n для $n = 2, 3, 4, 8, 12$. В каждом случае указать первообразные корни из 1 степени n. Число ε называется первообразным корнем из 1 степени n, если множество его степеней (ε^0, ε^1, ε^2, …) совпадает со множеством всех корней из 1 степени n.

$\boxed{6}$ Комплексно-сопряжённым к числу $z = x + iy$ называют число $\bar{z} = x - iy$. Убедиться в том, что $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$,

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

$\boxed{7}$ Решить уравнения:

$$z^3 = \bar{z}, \qquad |z| + z = 8 + 4i.$$

Можно искать решение либо алгебраической форме ($z = u + iv$), либо в тригонометрической ($z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$).

$\boxed{8}$ Используя формулу Муавра и формулу бинома Ньютона, выразить $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, если $n = 3, 4, 5, 6$. Можно решить задачу для произвольного n.

$\boxed{9}$ Используя формулы Эйлера и формулу бинома Ньютона, представить в виде линейной комбинации функций вида $\sin k\varphi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ либо $\cos k\varphi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ следующие функции:

$$\sin^4\varphi, \qquad \cos^4\varphi, \qquad \sin^3\varphi.$$

$\boxed{10}$ Используя формулу суммы геометрической прогрессии и формулу Эйлера, упростить выражения:

$$1)\ \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi.$$

$$2)\ \frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi.$$

(Ввести переменную $t = \cos\varphi + i\sin\varphi$. В примере 1) можно взять мнимую часть от $t + t^2 + \ldots + t^n$; В примере 2) выгоднее выразить функции $\cos k\varphi$ через t^k и t^{-k} по формуле Эйлера.)

$\boxed{11}$ Доказать, что если $t = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то

$$(1 - at)(1 - at^{-1}) = 1 - 2a\cos\varphi + a^2.$$

$\boxed{12}$ Упростить выражение:

$$a\sin\varphi + a^2\sin 2\varphi + \ldots + a^n\sin n\varphi.$$

(Ввести переменную $t = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и выразить $\sin k\varphi$ через t. Просуммировать полученные геометрические прогрессии и упростить результат. Для упрощения знаменателя можно использовать результат задачи 10.)

$\boxed{13}$ Легко видеть, что решения уравнения $t^m = 1$ (корни из 1 степени m) имеют вид ε_m^k, $k = 0, 1, \ldots, m - 1$, где

$$\varepsilon_m = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}.$$

Используя этот факт, решить уравнения:

$$1)\ (z + 1)^m - (z - 1)^m = 0, \qquad 2)\ (z + i)^m - (z - i)^m = 0.$$

$\boxed{14}$ Абсолютной величиной (модулем) числа $z = x+iy$ называется число

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Доказать, что

$$|z|^2 = z\bar{z}, \qquad \operatorname{Re}(z) \leqslant |\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|, \qquad \operatorname{Im}(z) \leqslant |\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|.$$

Используя свойства сопряжения (задача 6), вывести отсюда следующие свойства:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$
$$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2),$$
$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

$\boxed{15}$ Доказать “неравенство треугольника” (полуаддитивность абсолютной величины):

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Вывести отсюда “обратное неравенство треугольника”:

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

$\boxed{16}$ Понять, что $|z_2 - z_1|$ — длина вектора с началом z_1 и концом z_2. Поэтому $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ — окружность с центром z_0 радиуса r. Изобразить на комплексной плоскости множества, заданные условиями:

$$1)\ |z - 4 + 3i| = 3, \qquad 2)\ |z - 1| \geqslant 2, \qquad 3)\ |z + 2 - i| < 4.$$

$\boxed{17}$ С помощью рисунков доказать, что следующие системы не имеют решений:

$$1)\ \begin{cases} |z - 3 + i| = 1, \\ |z| = 2; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} |z + 1 - i| = 1, \\ |z| = 3. \end{cases}$$

Можно доказать это и алгебраически, используя неравенство треугольника.

$\boxed{18}$ Доказать “тождество параллелограмма”:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Понять его геометрический смысл, рассмотрев параллелограмм с вершинами $0, z_1, z_2, z_1 + z_2$.