

Алгебра и аналит. геометрия, 1-й семестр

6-е занятие. Эллипс

[A1] Составить уравнения касательных, проведённых из точки $M(3; -1)$ к окружности $\gamma: x^2 + 8x + y^2 - 4y - 5 = 0$.

Эллипс. Уравнение. Эксцентриситет. Директрисы. Фокальные радиусы. Уравнение касательной. Условие касания.

[385] Определить эксцентриситет эллипса, зная, что

- 1) малая ось его видна из фокуса под прямым углом;
- 2) расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами малой и большой осей.
- 3) расстояние между директрисами в четыре раза больше расстояния между фокусами.

[387] На эллипсе $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ найти точку, отстоящую на расстоянии пяти единиц от его малой оси.

[A2] На эллипсе $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ найти точку M , расстояние от которой до правого фокуса в четыре раза больше расстояния от неё до левого фокуса. ($r_1 = a + \varepsilon x_0$, $r_2 = a - \varepsilon x_0$.)

[394] На эллипсе, один из фокусов которого имеет координаты $(+3; 0)$, взята точка $M(+4; +2, 4)$. Найти расстояние этой точки до соответствующей директрисы, зная, что центр эллипса совпадает с началом координат.

[A3] Написать уравнение прямой, касающейся эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ в точке $M(2, -3)$.

[411] Вывести условие, при котором прямая $Ax + By + C = 0$ имеет ровно одну точку пересечения с эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

[A4] Найти уравнения касательных:

- 1) к эллипсу $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, проведённых из точки $M(-1; 3)$.
- 2) к эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, проведённых из точки $M(5; -2)$.

Домашнее задание № 6

Алг. и аналит. геом., 1-й семестр (прикл. мат.)

323] Найти уравнение окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты:

1) $(+7; +7)$, $(0; +8)$, $(-2; +4)$, 2) $(0; +4)$, $(+1; +2)$, $(+3; -2)$.

(Центр описанной окружности равноудалён от вершин \triangle .)

326] Привести к нормальному виду уравнения следующих окружностей:

1) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$; 4) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14 = 0$.

343] В точке $(0; +3)$ провести касательную к окружности

$$x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0.$$

345] Составить уравнения касательных, проведённых:

1) из начала координат к окружности $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2$;

2) из точки $(+7; +1)$ к окружности $x^2 + y^2 = 25$.

346] Найти те касательные к окружности $x^2 + y^2 = 5$, которые параллельны прямой $2x - y + 1 = 0$.

375] Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что:

1) полуоси его соответственно равны 4 и 2;

2) расст. между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;

3) большая полуось равна 10 и эксцентриситет $\varepsilon = 0,8$;

4) малая полуось равна 3 и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}/2$;

5) сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами тоже равно 8.

384] Прямые $x = \pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.

400] Дан эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Через точку $(+1; +1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

401] Написать уравнение прямой, касающейся эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ в точке $(+2; -3)$.

403] Найти те касательные к эллипсу $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$, которые параллельны прямой $2x - y + 17 = 0$.

406] Найти уравнения тех касательных эллипса $3x^2 + 8y^2 = 45$, расстояние которых от центра эллипса равно 3.

(Подсказка: использовать условие касания эллипса и прямой, а также формулу расстояния от точки до прямой.)

410] Доказать, что произведение расстояний любой касательной эллипса от двух его фокусов есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.

411] Вывести условие, при котором прямая $Ax + By + C = 0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (Найти условие, при котором имеется ровно одна точка пересечения.)

A1] Найти уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, проходящих через точку $(7; 1)$.

415] Составить уравнения общих касательных двух эллипсов:

$$\frac{x^2}{6} + y^2 = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$