1-е занятие. Комплексные числа: алгебраическая форма Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Записать комплексные числа в алгебраической форме и отметить на комплексной плоскости: $(3;-4)$, $(7;5)$, $(-2;3)$, $(4;0)$, $(0;-3)$.

$\boxed{\text{A2}}$ Найти сумму, разность и произведение следующих комплексных чисел:

1) $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 5 + 7i;$ 2) $z_1 = 4 + 5i,\ z_2 = 3 - 8i;$
3) $z_1 = 3 - i,\ z_2 = 2i;$ 4) $z_1 = -i,\ z_2 = 4 + i.$

$\boxed{\text{A3}}$ Для каждого из следующих комплексных чисел z вычислить $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$, $|z|$, $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ и $z \cdot \bar{z}$:

1) $z = 3 + 2i;$ 2) $z = -4 + 5i;$ 3) $z = -5;$ 4) $z = 3i.$

$\boxed{\text{A4}}$ Доказать, что

$$\boxed{z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z,} \qquad \boxed{z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z,} \qquad \boxed{z \cdot \bar{z} = |z|^2.}$$

$\boxed{\text{A5}}$ Изобразить на комплексной плоскости линии, заданные следующими уравнениями:

$$\operatorname{Re} z = -3; \qquad \operatorname{Im} z = 5; \qquad |z| = 5; \qquad |z - 1 + 3i| = 2.$$

$\boxed{\text{A6}}$ Найти частное z_1/z_2 и сделать проверку:

1) $z_1 = 13 - 11i,\ z_2 = 3 - 7i;$ 2) $z_1 = 3 + 5i,\ z_2 = 4 + 7i.$

$\boxed{\text{A7}}$ Решить систему линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера и сделать проверку:

$$\begin{cases} iz_1 + (4+3i)z_2 = 4 - 2i; \\ (1-2i)z_1 + (-2+4i)z_2 = 4 - 3i. \end{cases}$$

$\boxed{\text{A8}}$ Найти квадратные корни из следующих чисел, сделать проверку:

1) $-9;$ 2) $5 - 12i;$ 3) $-21 + 20i.$

$\boxed{\text{A9}}$ Решить квадратное уравнение и сделать проверку по формулам Виета:

$$z^2 + 3z + 3 = 0.$$

$\boxed{\text{A10}}$ Решить квадратное уравнение и сделать проверку по формулам Виета:

$$z^2 + (-4 + 5i)z + (-4 - i) = 0.$$

Домашнее задание № 1
Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Записать комплексные числа в алгебраической форме и отметить на комплексной плоскости: $(2;1)$, $(-3;2)$, $(5;1)$, $(-3;0)$, $(0;4)$.

$\boxed{\text{A2}}$ На примере чисел $z_1 = 3+2i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = 5-2i$ проверить дистрибутивность умножения относительно сложения и ассоциативность умножения:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \qquad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

$\boxed{\text{A3}}$ Для каждого из следующих комплексных чисел z вычислить $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$, $|z|$, $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ и $z \cdot \bar{z}$:

$$1)\ z = -2 + i; \qquad 2)\ z = 3 + 2i; \qquad 3)\ z = 4; \qquad 4)\ z = -5i.$$

$\boxed{\text{A4}}$ Доказать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

$\boxed{\text{A5}}$ Доказать (с помощью результатов предыдущего упражнения), что

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$$

$\boxed{\text{A6}}$ Отметить на комплексной плоскости линии, заданные следующими уравнениями:

$$\operatorname{Re} z = 4; \quad \operatorname{Im} z = -3; \quad \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 2; \quad |z| = 3; \quad |z + 2 - i| = 1.$$

$\boxed{\text{A7}}$ Вычислить частное z_1/z_2 и сделать проверку:

$$1)\ \frac{11 - 7i}{2 + i}, \qquad 2)\ \frac{3 + 11i}{3 + i}.$$

$\boxed{\text{A8}}$ Решить систему линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера и сделать проверку:

$$\begin{cases} (-1 - 2i)x_1 & + & (3 + i)x_2 & = & -7 - 9i; \\ (3 + 3i)x_1 & + & (-1 - 2i)x_2 & = & 4 + 6i. \end{cases}$$

$\boxed{\text{A9}}$ Найти квадратные корни из следующих чисел и сделать проверку:

$$1)\ -4; \qquad 2)\ -8 + 6i; \qquad 3)\ -16 - 30i.$$

$\boxed{\text{A10}}$ Решить квадратное уравнение и сделать проверку по формулам Виета:

$$z^2 + 4z + 13 = 0.$$

$\boxed{\text{A11}}$ Решить квадратное уравнение и сделать проверку по формулам Виета:

$$z^2 + (-3 + i)z + (6 - 7i) = 0.$$

Конспект 1-го занятия.
Комплексные числа: алгебраическая форма
Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

Запись комплексных чисел в алгебраической форме и их изображение на комплексной плоскости

$\boxed{\text{A1}}$ Записать комплексные числа в алгебраической форме и отметить на комплексной плоскости:

$$(3;-4), \qquad (7;5), \qquad (-2;3), \qquad (4;0), \qquad (0;-3).$$

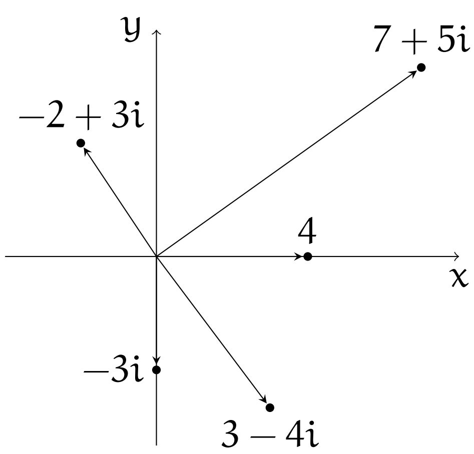
Решение. Вспомним, что комплексное число $(x;0)$ отождествляется с действительным числом x, а комплексное число $(0;1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается через i. Сложение комплексных чисел и умножение комплексного числа на действительное определяются точно так же, как для векторов из $\mathbb{R}^2$. Поэтому для любых $x, y \in \mathbb{R}$ получим:

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + y \cdot (0,1) = x + yi.$$

Примеры:

$$\begin{aligned} (3;-4) &= (3;0) + (0;-4) = (3;0) - 4 \cdot (0;-1) = 3 - 4i; \\ (7;5) &= (7;0) + (0;5) = (7;0) + 5 \cdot (0;1) = 7 + 5i; \\ (-2;3) &= -2 + 3i; \\ (4;0) &= 4; \\ (0;-3) &= -3i. \end{aligned}$$

Отметим эти комплексные числа на комплексной плоскости. Комплексное число $x + yi$ отождествляется с точкой $M(x;y)$, а также с вектором $\overrightarrow{OM}$, где $O(0;0)$.



Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел в алгебраической форме

$\boxed{\text{A2}}$ Найти сумму, разность и произведение следующих комплексных чисел:

1) $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 5 + 7i;$ 2) $z_1 = 4 + 5i,\ z_2 = 3 - 8i;$
3) $z_1 = 3 - i,\ z_2 = 2i;$ 4) $z_1 = -i,\ z_2 = 4 + i.$

Решение.

1) $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 5 + 7i$. При сложении и вычитании комплексных чисел их действительные и мнимые части складываются отдельно, как у двумерных векторов:

$$z_1 + z_2 = 7 + 4i, \qquad z_1 - z_2 = -3 - 10i.$$

При умножении нужно учитывать, что $i^2 = -1$. Поэтому комплексные числа умножаются по следующему правилу:

$$\boxed{(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.}$$

В нашем примере:

$$z_1 \cdot z_2 = (10 + 21) + (14 - 15)i = 31 - i.$$

2) $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 3 - 8i$.

$$z_1 + z_2 = 7 - 3i, \qquad z_1 - z_2 = 1 + 13i, \qquad z_1 \cdot z_2 = 52 - 17i.$$

3) $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 2i$.

$$z_1 + z_2 = 3 + i, \qquad z_1 - z_2 = 3 - 4i, \qquad z_1 \cdot z_2 = 2 + 6i.$$

4) $z_1 = -i$, $z_2 = 4 + i$.

$$z_1 + z_2 = 4, \qquad z_1 - z_2 = -4 - 2i, \qquad z_1 \cdot z_2 = 1 - 4i.$$

Действительная и мнимая части комплексного числа, модуль, комплексно-сопряжённое число

$\boxed{\text{A3}}$ Для каждого из следующих комплексных чисел z вычислить $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$, $|z|$, $z+\bar{z}$, $z-\bar{z}$ и $z\cdot\bar{z}$:

$$1)\ z = 3+2i; \qquad 2)\ z = -4+5i; \qquad 3)\ z = -5; \qquad 4)\ z = 3i.$$

Решение.

1) $z = 3+2i$. Здесь $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = 2$, $|z| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$,

$$\bar{z} = 3-2i, \qquad z+\bar{z} = 6, \qquad z-\bar{z} = 4i, \qquad z\cdot\bar{z} = 9+4 = 13.$$

2) $z = -4+5i$. Здесь $\operatorname{Re} z = -4$, $\operatorname{Im} z = 5$, $|z| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$,

$$\bar{z} = -4-5i, \qquad z+\bar{z} = -8, \qquad z-\bar{z} = 10i, \qquad z\cdot\bar{z} = 16+25 = 41.$$

3) $z = -5$. Здесь $\operatorname{Re} z = -5$, $\operatorname{Im} z = 0$, $|z| = \sqrt{25} = 5$,

$$\bar{z} = -5, \qquad z+\bar{z} = -10, \qquad z-\bar{z} = 0, \qquad z\cdot\bar{z} = 25.$$

4) $z = 3i$. Здесь $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 3$, $|z| = \sqrt{9} = 3$,

$$\bar{z} = -3i, \qquad z+\bar{z} = 0, \qquad z-\bar{z} = 6i, \qquad z\cdot\bar{z} = 9.$$

$\boxed{\text{A4}}$ Доказать, что

$$\boxed{z+\bar{z} = 2\operatorname{Re} z,} \qquad \boxed{z-\bar{z} = 2i\operatorname{Im} z,} \qquad \boxed{z\cdot\bar{z} = |z|^2.}$$

Решение. Пусть $z = x+yi$. Тогда, по определению, $z = x-yi$. Отсюда

$$z+\bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re}(z), \qquad z-\bar{z} = 2yi = 2i\operatorname{Im}(z),$$

$$z\cdot\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - i^2y^2 = x^2+y^2 = |z|^2.$$

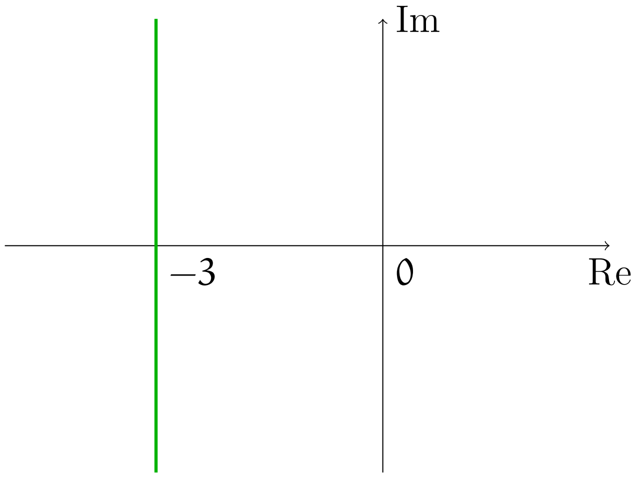
Изображение на комплексной плоскости линий, заданных условиями на действительную или мнимую части комплексного числа, или на его модуль

$\boxed{\text{A5}}$ Отметить на комплексной плоскости линии, заданные следующими уравнениями:

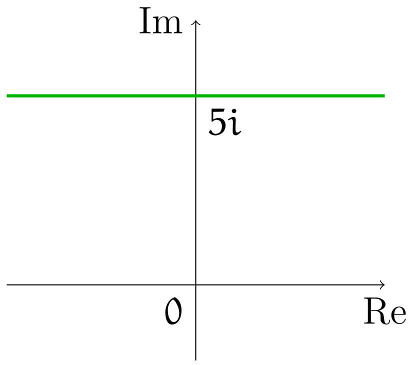
$$\operatorname{Re} z = -3; \qquad \operatorname{Im} z = 5; \qquad |z| = 5; \qquad |z - 1 + 3i| = 2.$$

Решение. Всюду будем считать, что $z = x + yi = (x, y)$.

1. $\operatorname{Re} z = -3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -3.$
   Это вертикальная прямая, проходящая через точку $(-3, 0)$.

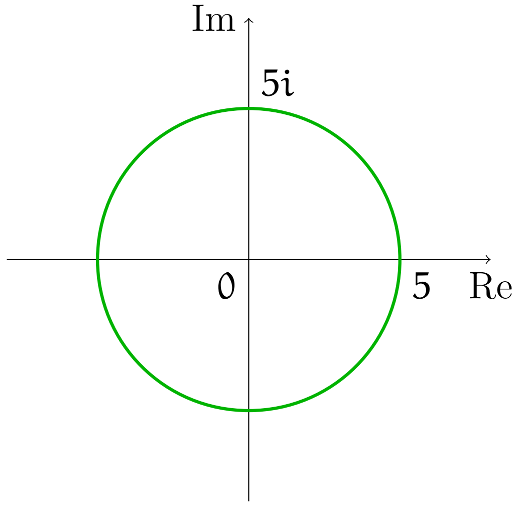


2. $\operatorname{Im} z = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 5.$
   Это горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0, 5)$.



3. $|z| = 5$. Заметим, что величина $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ есть расстояние от z до начала координат:
$$\boxed{|z| = d(z, 0).}$$

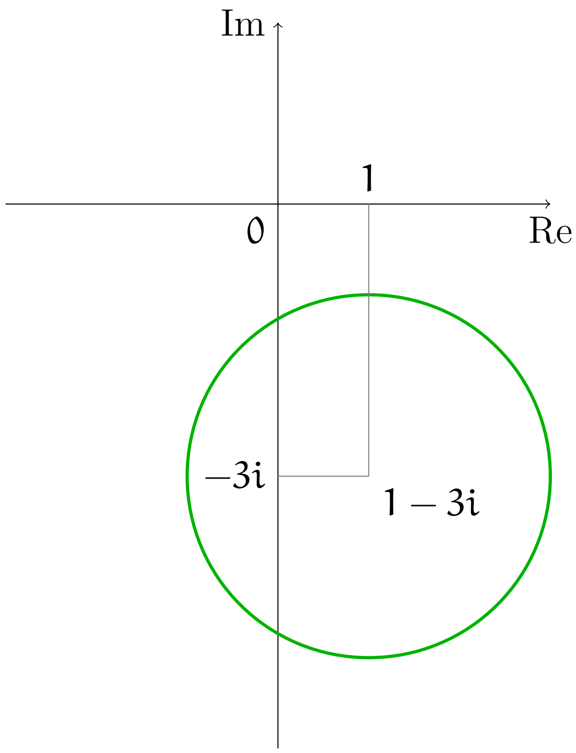
Поэтому условие $|z| = 5$ можно переписать в виде $d(z, 0) = 5$ или в виде $x^2 + y^2 = 25$. Это окружность с центром в нуле радиуса 5.



4. $|z - 1 + 3i| = 2$. Заметим, что комплексное число $z_2 - z_1$ соответствует вектору, идущему из точки z_1 в точку z_2. Величина $|z_1 - z_2|$ есть длина этого вектора, т. е. расстояние между точками z_1 и z_2:

$$\boxed{|z_1 - z_2| = d(z_1, z_2).}$$

Условие $|z - 1 + 3i| = 2$ можно переписать в виде $d(z, 1 - 3i) = 2$. Получается множество точек, удалённых от точки $1 - 3i$ на расстояние 2, т. е. окружность с центром $1 - 3i$ радиуса 2.



Деление комплексных чисел в алгебраической форме

$\boxed{\text{A6}}$ Найти частное z_1/z_2 и сделать проверку:

$$1)\ z_1 = 13 - 11i,\ z_2 = 3 - 7i; \qquad 2)\ z_1 = 3 + 5i,\ z_2 = 4 + 7i.$$

Решение. Для деления комплексных чисел используем следующую схему:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Рассмотрим конкретные примеры.

1)

$$\frac{13 - 11i}{3 - 7i} = \frac{(13 - 11i)(3 + 7i)}{(3 - 7i)(3 + 7i)} = \frac{39 + 77 + 91i - 33i}{9 + 49} = \frac{116 + 58i}{58} = 2 + i.$$

Проверка:

$$(3 - 7i)(2 + i) = (6 + 7) + (3 - 14)i = 13 - 11i. \quad \checkmark$$

2)

$$\frac{3 + 5i}{4 + 7i} = \frac{(3 + 5i)(4 - 7i)}{(4 - 7i)(4 + 7i)} = \frac{12 + 35 - 21i + 20i}{16 + 49} = \frac{47 - i}{65} = \frac{47}{65} - \frac{1}{65}\,i.$$

Проверка:

$$(4 + 7i) \cdot \frac{47 - i}{65} = \frac{(188 + 7) + (329 - 4)i}{65} = \frac{195 + 325i}{65} = 3 + 5i. \quad \checkmark$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами по формулам Крамера

$\boxed{\text{A7}}$ Решить систему линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера и сделать проверку:

$$\begin{cases} iz_1 & + & (4+3i)z_2 & = & 4-2i; \\ (1-2i)z_1 & + & (-2+4i)z_2 & = & 4-3i. \end{cases}$$

Решение. Вспомним формулы Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Естественно, эти формулы работают при $\Delta \neq 0$. Вычислим Δ, т. е. определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} i & 4+3i \\ 1-2i & -2+4i \end{vmatrix} = i \cdot (-2+4i) - (4+3i)(1-2i) =$$
$$= (-4-2i) - (10-5i) = -14+3i.$$

Заметим, что $\Delta \neq 0$, поэтому формулы Крамера применимы.

Вычислим определитель Δ_1, который получается, если заменить первый столбец матрицы системы столбцом правых частей системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4-2i & 4+3i \\ 4-3i & -2+4i \end{vmatrix} = (4-2i)(-2+4i) - (4+3i)(4-3i) =$$
$$= (0+20i) - (25+0i) = -25+20i.$$

Наконец, определитель Δ_2 получается, если в определителе матрицы системы заменить второй столбец на столбец правых частей:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} i & 4-2i \\ 1-2i & 4-3i \end{vmatrix} = i \cdot (4-3i) - (4-2i)(1-2i) =$$
$$= (3+4i) - (0-10i) = 3+14i.$$

Теперь можем найти решение системы по формулам Крамера:

$$z_1 = \frac{-25+20i}{-14-3i} = \frac{(-25+20i)(-14-3i)}{(-14-3i)(-14+3i)} = \frac{410-205i}{205} = 2-i;$$
$$z_2 = \frac{3+14i}{-14+3i} = \frac{-i(-14+3i)}{-14+3i} = -i.$$

Проверка:

$$\begin{cases} i(2-i) & + & (4+3i)(-i) & = & (1+2i)+(3-4i) & = & 4-2i; & \checkmark \\ (1-2i)(2-i) & + & (-2+4i)(-i) & = & (-5i)+(4+2i) & = & 4-3i. & \checkmark \end{cases}$$

Ответ: $z_1 = 2-i$, $z_2 = -i$.

Извлечение квадратных корней из комплексных чисел в алгебраической форме

A8 Найти квадратные корни из следующих чисел, сделать проверку:

$$1)\ -9; \qquad 2)\ 5-12i; \qquad 3)\ -21+20i.$$

Решение.

1) $z^2 = -9$. Поскольку $i^2 = -1$, то нетрудно догадаться, что -9 имеет квадратные корни $z_1 = 3i$ и $z_2 = -3i$.

   На лекциях доказывается, что для любого $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ существует ровно n корней n-й степени из a. В частности, для любого ненулевого комплексного числа существует ровно два квадратных корня.

   Теперь заметим, что если $z_1^2 = a$, то $(-z_1)^2 = a$. Таким образом, *квадратные корни из комплексного числа* a *взаимно противоположны.*

   Ответ: $3i$, $-3i$.

2) $z^2 = 5 - 12i$. Будем искать корни в виде $u + vi$. Заметим, что

$$(u+vi)^2 = (u^2 - v^2) + 2uvi.$$

   По определению, комплексные числа равны $\iff$ их действительные части равны и их мнимые части равны. Поэтому для переменных u, v получаем следующую систему:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 5; \\ 2uv = -12. \end{cases}$$

   Проще всего решать эту систему следующим способом. Возведём оба уравнения в квадрат и сложим:

$$(u^4 - 2u^2v^2 + v^4) + 4u^2v^2 = 25 + 144.$$

   После упрощения: $(u^2 + v^2)^2 = 169$, т. е. $u^2 + v^2 = 13$. Для u^2 и v^2 получили простую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 13; \\ u^2 - v^2 = 5. \end{cases}$$

   Складывая и вычитая уравнения, найдём $u^2 = 9$, $v^2 = 4$. При возведении в квадрат мы потеряли равносильность, поэтому нужно учесть исходное уравнение $2uv = -12$. Знаки переменных u, v нужно выбирать так, чтобы их произведение было отрицательно. Получаем два решения:

$$u_1 = 3,\ v_1 = -2,\ z_1 = 3 - 2i; \qquad u_2 = -3,\ v_2 = 2,\ z_2 = -3 + 2i.$$

Проверка (достаточно делать для z_1, так как $z_2 = -z_1$):

$$(3 - 2i)^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i. \quad \checkmark$$

<u>Ответ:</u> $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -3 + 2i$.

3) $z^2 = -21 + 20i$. В этом примере получаем систему

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = -21; \\ 2uv = 20. \end{cases}$$

Возводим в квадрат и складываем: $(u^2+v^2)^2 = 841$, откуда $u^2+v^2 = 29$. Система для u^2 и v^2:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 29; \\ u^2 - v^2 = -21. \end{cases}$$

Отсюда $u^2 = 4$, $v^2 = 25$. Теперь нужно учесть, что $uv > 0$. Получим два решения:

$$u_1 = 2,\ v_1 = 5,\ z_1 = 2 + 5i; \qquad u_2 = -2,\ v_2 = -5,\ z_2 = -2 - 5i.$$

Проверка:

$$(2 + 5i) = 4 - 25 + 20i = -21 + 20i. \quad \checkmark$$

<u>Ответ:</u> $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -2 - 5i$.

Решение квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом

$\boxed{\text{A9}}$ Решить квадратное уравнение и сделать проверку по формулам Виета:

$$z^2 + 3z + 3 = 0.$$

Решение. Вспомним, что корни квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$, где $a \neq 0$, находятся по формуле

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2}, \qquad z_2 = \frac{-b + w_2}{2}, \tag{1}$$

где w_1 и w_2 — квадратные корни из дискриминанта $D = b^2 - 4ac$. Поскольку $w_2 = -w_1$, то вместо $-b + w_1$ и $-b + w_2$ иногда пишут $-b \pm \sqrt{D}$, но мы так писать не будем.

Перейдём к решению данного примера. Вычислим дискриминант:

$$D = 3^2 - 4 \cdot 3 = -3.$$

Найдём квадратные корни из дискриминанта: $w_1 = \sqrt{3}i$, $w_2 = -\sqrt{3}i$. Теперь применяем формулу (1):

$$z_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2}, \qquad z_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Проверка по формулам Виета:

$$z_1 + z_2 = \frac{(-3 + \sqrt{3}i) + (-3 - \sqrt{3}i)}{2} = \frac{-6}{2} = -3, \qquad \checkmark$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{(-3 + \sqrt{3}i)(-3 - \sqrt{3}i)}{4} = \frac{9 + 3}{4} = 3. \qquad \checkmark$$

<u>Ответ:</u> $\dfrac{-3 + \sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-3 - \sqrt{3}i}{2}$.

Решение квадратного уравнения с комплексными коэффициентами

$\boxed{\text{A10}}$ Решить квадратное уравнение и сделать проверку по формулам Виета:

$$z^2 + (-4 + 5i)z + (-4 - 4i) = 0.$$

Решение. Вычислим дискриминант D:

$$D = (-4 + 5i)^2 - 4 \cdot (-4 - 4i) = (-9 - 40i) + (16 + 16i) = 7 - 24i.$$

Теперь найдём квадратные корни из D, т. е. решим вспомогательное уравнение $w^2 = D$. Будем искать w в виде $w = u + vi$. Тогда для u, v получим систему:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 7; \\ 2uv = -24. \end{cases}$$

Возведём уравнения в квадрат и сложим. После упрощения: $(u^2+v^2)^2 = 625$, откуда $u^2+v^2 = 25$. Для u^2 и v^2 имеем систему, которую легко решить путём сложения и вычитания уравнений:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 25; \\ u^2 - v^2 = 7. \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} u^2 = 16; \\ v^2 = 9. \end{cases}$$

Выбирая знаки u и v, следует учесть, что $uv < 0$. Получим два решения:

$$u_1 = 4,\ v_1 = -3,\ w_1 = 4 - 3i; \qquad u_2 = -4,\ v_2 = 3,\ w_2 = -4 + 3i.$$

Подставляя в формулу $z_k = \frac{-b+w_k}{2a}$ $(k = 1, 2)$, найдём корни исходного уравнения:

$$z_1 = \frac{4 - 5i + 4 - 3i}{2} = 4 - 4i, \qquad z_2 = \frac{4 - 5i - 4 + 3i}{2} = -i.$$

Проверка по формулам Виета:

$$z_1 + z_2 = (4 - 4i) - i = 4 - 5i; \quad \checkmark$$
$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 4i) \cdot (-i) = -4 - 4i. \quad \checkmark$$

<u>Ответ:</u> $4 - 4i$, $-i$.