2-е занятие. Комплексные числа: тригонометр. форма
Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Перевести комплексные числа из тригонометрической формы в алгебраическую и отметить на комплексной плоскости:

$$1)\ z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), \qquad 2)\ z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$3)\ z = 3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right), \qquad 4)\ z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

$\boxed{\text{A2}}$ Каждое из следующих чисел представить в виде $\cos\varphi + i\sin\varphi$:

$$1)\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad 2)\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad 3)\ -i, \qquad 4)\ -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

$\boxed{\text{A3}}$ Перевести комплексные числа в тригонометрическую форму:

$$1)\ 12 + 5i, \qquad 2)\ i, \qquad 3)\ -4, \qquad 4)\ -4 - 4i,$$

$$5)\ 24 - 7i, \qquad 6)\ -8 - 6i, \qquad 7)\ -3\sqrt{3} + 3i, \qquad 8)\ -5i.$$

$\boxed{\text{A4}}$ Отметить на комплексной плоскости множества, заданные следующими условиями:

$$1)\ \arg z = \frac{3\pi}{4}, \qquad 2)\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi, \qquad 3)\ \frac{5\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \frac{7\pi}{6}.$$

$\boxed{\text{A5}}$ Выполнить умножение и деление, переведя комплексные числа в тригонометрическую форму:

$$1)\ (3 - 3i)\cdot(5i), \qquad 2)\ \frac{i}{\sqrt{3} - i}.$$

$\boxed{\text{A6}}$ Вычислить степени с помощью формулы Муавра:

$$1)\ (-2 + 2i)^8; \qquad 2)\ i^{19}; \qquad 3)\ (-1 + \sqrt{3}i)^5.$$

$\boxed{\text{A7}}$ Решить уравнения, используя тригонометрическую форму:

$$1)\ z^3 = i; \qquad 2)\ z^6 = 1.$$

$\boxed{\text{A8}}$ Выразить $\cos 4\varphi$ и $\sin 4\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, используя выражение $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$.

Домашнее задание № 2
Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Перевести комплексные числа из тригонометрической формы в алгебраическую и отметить на комплексной плоскости:

$$1)\ z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\qquad 2)\ z=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),$$
$$3)\ z=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right),\qquad 4)\ z=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

$\boxed{\text{A2}}$ Каждое из следующих чисел представить в виде $\cos\varphi+i\sin\varphi$:

$$1)\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\qquad 2)\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\qquad 3)\ -1,\qquad 4)\ \frac{12}{13}-\frac{5}{13}i.$$

$\boxed{\text{A3}}$ Перевести комплексные числа в тригонометрическую форму:

$$1)\ 3+4i,\qquad 2)\ -5,\qquad 3)\ -3i,\qquad 4)\ 2-2i,$$
$$5)\ -5+12i,\qquad 6)\ 5i,\qquad 7)\ -3\sqrt{3}+3i,\qquad 8)\ 1-\sqrt{3}i.$$

$\boxed{\text{A4}}$ Отметить на комплексной плоскости множества, заданные следующими условиями:

$$1)\ \arg z=\frac{7\pi}{6},\qquad 2)\ \frac{\pi}{6}\leqslant\arg z\leqslant\frac{2\pi}{3},\qquad 3)\ \frac{7\pi}{6}\leqslant\arg z\leqslant\frac{3\pi}{2}.$$

$\boxed{\text{A5}}$ Выполнить умножение и деление, переведя комплексные числа в тригонометрическую форму:

$$1)\ (4+4\sqrt{3}i)\cdot(-\sqrt{3}+i),\qquad 2)\ \frac{1+i}{-3+3i}.$$

$\boxed{\text{A6}}$ Вычислить степени с помощью формулы Муавра:

$$1)\ (-\sqrt{3}+i)^6;\qquad 2)\ (-i)^9;\qquad 3)\ (-1+i)^5.$$

$\boxed{\text{A7}}$ Решить уравнения, используя тригонометрическую форму:

$$1)\ z^4=-1;\qquad 2)\ z^3=-i.$$

$\boxed{\text{A8}}$ Выразить $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, используя выражение $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5$.

Конспект 2-го занятия.
Комплексные числа: тригонометрическая форма
Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

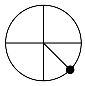
Перевод комплексного числа из тригонометрической формы в алгебраическую

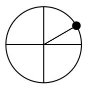
$\boxed{\text{A1}}$ Перевести комплексные числа из тригонометрической формы в алгебраическую и отметить на комплексной плоскости:

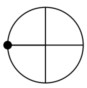
$$1)\ z = 3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right), \qquad 2)\ z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

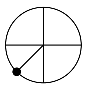
$$3)\ z = 3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right), \qquad 4)\ z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

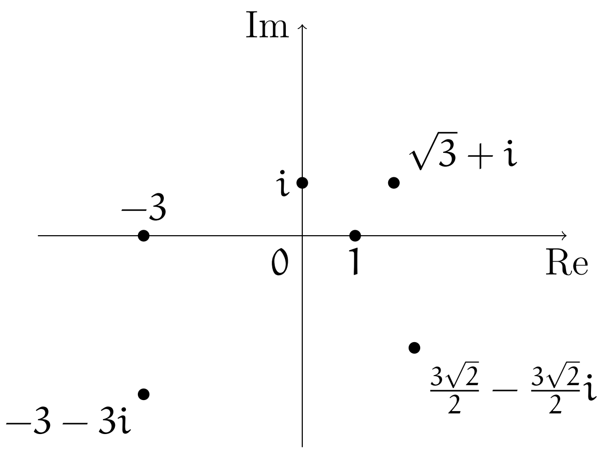
Решение. Просто подставляем значения cos и sin. Чтобы вспомнить значения cos и sin, можно рисовать единичную окружность и отмечать на ней точку, которая соответствует заданному углу.

1)  $z = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$

2)  $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i.$

3)  $z = 3(-1 + 0i) = -3.$

4)  $z = 3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -3 - 3i.$

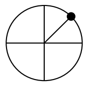


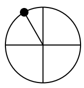
Нахождение угла для точек на единичной окружности

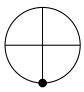
$\boxed{\text{A2}}$ Каждое из следующих чисел представить в виде $\cos\varphi + i\sin\varphi$:

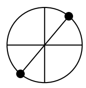
$$1)\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad 2)\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad 3)\ -i, \qquad 4)\ -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Решение. Каждое из данных комплексных чисел $z = x + yi$ обладает свойством $|z| = 1$, т. е. лежит на единичной окружности. Нужно просто отметить число на единичной окружности и выбрать тот угол, который ему соответствует. Будем выбирать угол из промежутка $[0, 2\pi)$. Конечно, нужно уметь быстро узнавать значения cos и sin для углов, кратных $\frac{\pi}{6}$ или $\frac{\pi}{4}$.

1) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.  $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.

2) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

3) $z = -i$.  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

4) $z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$. Сначала рассмотрим точку $\tilde{z} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. Её угол имеет тангенс $\frac{4}{3}$ и лежит в первой четверти, поэтому равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Она соответствует углу $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.  Наша точка симметрична точке $\tilde{z}$ относительно нуля, поэтому соответствует углу $\varphi = \pi + \frac{4}{3}$.
$z = \cos\left(\pi + \frac{4}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{4}{3}\right)$.

Перевод комплексного числа из алгебраической формы в тригонометрическую

$\boxed{\text{А3}}$ Перевести комплексные числа в тригонометрическую форму:

1) $12+5i$, 2) i, 3) -4, 4) $-4-4i$,
5) $24-7i$, 6) $-8-6i$, 7) $-3\sqrt{3}+3i$, 8) $-5i$.

Решение. Сначала вычисляем модуль комплексного числа $z=x+yi$, равный $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, и выносим его за скобку:

$$z=|z|\left(\frac{x}{|z|}+i\cdot\frac{y}{|z|}\right).$$

Затем число в скобках представляем как $\cos\varphi+i\sin\varphi$.

1) $12+5i=13\left(\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i\right)=13\left(\cos\operatorname{arctg}\frac{5}{12}+i\sin\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)$.

2) $i=1\cdot(0+1\cdot i)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

3) $-4=4(-1+0i)=4(\cos\pi+i\sin\pi)$.

4) $-4-4i=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

5) $24-7i=25\left(\frac{24}{25}-\frac{7}{25}i\right)=25\left(\cos\left(2\pi-\operatorname{arctg}\frac{7}{24}\right)+i\sin\left(2\pi-\operatorname{arctg}\frac{7}{24}\right)\right)$.

6) $-8-6i=10\left(-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i\right)=10\left(\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\right)$.

7) $-3\sqrt{3}+3i=6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=6\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

8) $-5i=5\,(0-1\cdot i)=5\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

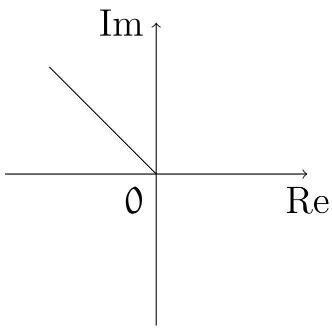
Множества на комплексной плоскости, заданные условиями на аргумент

$\boxed{\text{A4}}$ Отметить на комплексной плоскости множества, заданные следующими условиями:

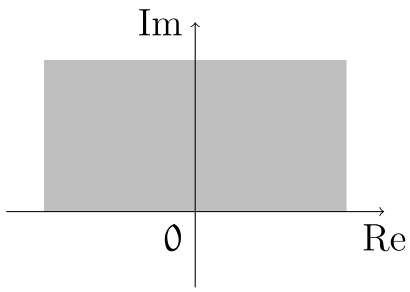
$$1)\ \arg z = \frac{3\pi}{4}, \qquad 2)\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi, \qquad 3)\ \frac{5\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \frac{7\pi}{6}.$$

Решение.

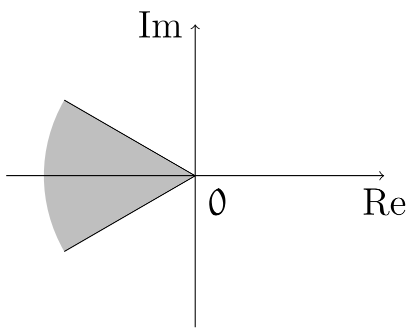
1) $\arg z = \frac{3\pi}{4}$. Этим условием задаётся луч, идущий из точки 0 в направлении угла $\frac{3\pi}{4}$.



2) $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$. Это условие описывает объединение всех лучей, соответствующих углам от 0 до π, т. е. замкнутую верхнюю полуплоскость.



3) $\frac{5\pi}{6} \leqslant \arg z \leqslant \frac{7\pi}{6}$. Это условие описывает бесконечный сектор с центром в начале координат, ограниченный лучами $\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$.



Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$\boxed{\text{A5}}$ Выполнить умножение и деление, переведя комплексные числа в тригонометрическую форму:

$$1)\ (3-3i)\cdot(5i), \qquad 2)\ \frac{i}{\sqrt{3}-i}.$$

Решение. Вспомним правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\boxed{\begin{aligned}\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)&=\\ &=(\rho_1\rho_2)(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).\end{aligned}}$$

При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются.

Правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$\boxed{\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).}$$

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

1) Нужно найти $z_1\cdot z_2$, где $z_1=3-3i$, $z_2=5i$. Переводим z_1 и z_2 тригонометрическую форму:

$$3-3i=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right);$$
$$5i=5(0+1i)=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Теперь применяем правило:

$$z_1\cdot z_2=15\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Можно перевести ответ в алгебраическую форму:

$$z_1\cdot z_2=15\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=15+15i.$$

2) Нужно найти z_1/z_2, где $z_1 = i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$. Переводим z_1 и z_2 в тригонометрическую форму:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$
$$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Применяем правило:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Возведение комплексного числа в степень с использованием тригонометрической формы (формула Муавра)

$\boxed{\text{A6}}$ Вычислить степени с помощью формулы Муавра:

$$1)\ (-2+2i)^8; \qquad 2)\ i^{19}; \qquad 3)\ (-1+i\sqrt{3})^5.$$

Решение. Формула Муавра:

$$\boxed{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).}$$

При возведении комплексного числа в степень n его модуль возводится в степень n, а аргумент умножается на n.

1. $-2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

$$(-2+2i)^8 = (2\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{3\pi\cdot 8}{4} + i\sin\frac{3\pi\cdot 8}{4}\right) =$$
$$= 2^{12}(\cos 6\pi + i\sin 6\pi) = 2^{12} = 4096.$$

2. $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

$$i^{19} = \cos\frac{19\pi}{2} + i\sin\frac{19\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

3. $-1+i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

$$(-1+i\sqrt{3})^5 = 2^5\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right) = 2^5\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) =$$
$$= 2^5\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -16 - 16i\sqrt{3}.$$

Извлечение корней из комплексных чисел с использованием тригонометрической формы

$\boxed{\text{A7}}$ Решить уравнения, используя тригонометрическую форму:

$$1)\ z^3 = 8i; \qquad 2)\ z^6 = 1.$$

Решение. Напомним общую формулу. Чтобы решить уравнение вида $z^n = w$, мы переводим w в тригонометрическую форму $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ищем z в тригонометрической форме $z = r(\cos\psi + i\sin\psi)$. Применяя к z^n формулу Муавра, получим уравнение:

$$r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Так как модуль комплексного числа находится однозначно, отсюда получаем $r^n = \rho$, и поскольку $r \geqslant 0$ и $\rho \geqslant 0$, то $r = \sqrt[n]{\rho}$.

Аргумент находится с точностью до 2π, поэтому

$$n\psi = \varphi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $\psi_k = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\psi_k + i\sin\psi_k\right).$$

Легко доказать, что $z_k = z_l \iff k - l$ делится на n. Поэтому при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ получаются попарно различные значения z_k, а при остальных k получаются те же самые z_k.

1) $z^3 = 8i$. Переводим в тригонометрическую форму:

$$r^3(\cos 3\psi + i\sin 3\psi) = 8\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

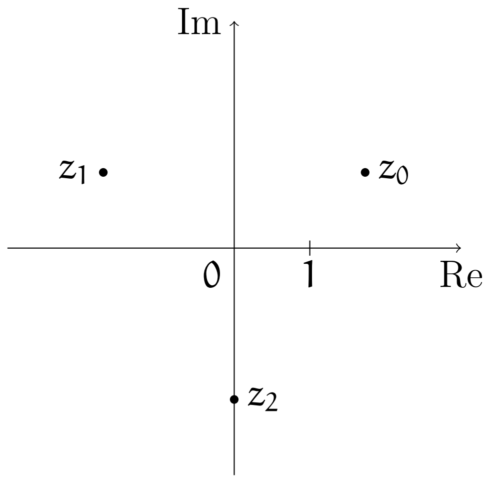
Отсюда $r = 2$ и $\psi = \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$. Различные значения z_k получатся при $k = 0, 1, 2$:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}; \qquad z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i;$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}; \qquad z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i;$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}; \qquad z_2 = 2\left(0 - i\right) = -2.$$

Корни n-й степени из комплексного числа являются вершинами правильного n-угольника:



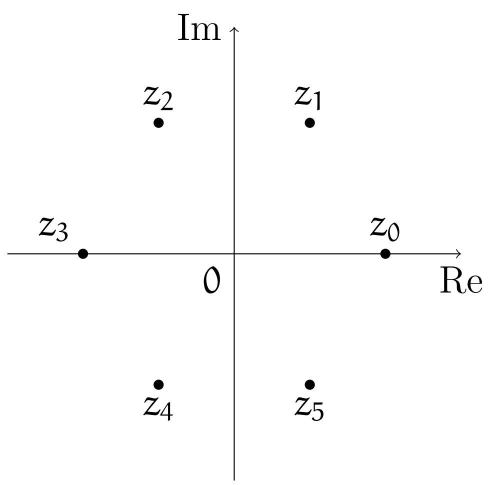
2) $z^6 = 1$. В тригонометрической форме:

$$r^6(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0).$$

Находим z_k, $k = 0, \ldots, 5$:

$$\begin{array}{llll}
\varphi_0 = 0; & z_0 = 1; & \varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}; & z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i; \\
\varphi_2 = \dfrac{2\pi}{3}; & z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i; & \varphi_3 = \pi; & z_3 = -1; \\
\varphi_4 = \dfrac{4\pi}{3}; & z_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\, i; & \varphi_5 = \dfrac{5\pi}{3}; & z_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\, i;
\end{array}$$

Отметим корни на комплексной плоскости:



Вывод формул для $\cos n\varphi$ ***и*** $\sin n\varphi$ ***с помощью комплексных чисел***

$\boxed{\text{A8}}$ Выразить $\cos 4\varphi$ и $\sin 4\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, используя выражение $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$.

Решение. С одной стороны, по формуле Муавра,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi.$$

С другой стороны, по формуле для степени бинома,

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 &= \cos^4\varphi + 4\cos^3\varphi\cdot(i\sin\varphi) + 6\cos^2\varphi\cdot(i\sin\varphi)^2 + \\ &\quad + 4\cos\varphi\cdot(i\sin\varphi)^3 + (i\sin\varphi)^4 = \\ &= \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - \\ &\quad - 4\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi.\end{aligned}$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получим формулы для $\cos 4\varphi$ и $\sin 4\varphi$:

$$\begin{aligned}\cos 4\varphi &= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi;\\ \sin 4\varphi &= 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi.\end{aligned}$$