4-е занятие. Расширенный алгоритм Евклида. Корни многочленов Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

Пользуясь расширенным алгоритмом Евклида, подобрать полиномы $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x),$$

где $d(x)$ — наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$. Сделать проверку.

$\boxed{\text{ФС 578a}}$ $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$

$\boxed{\text{ФС 578f}}$ $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9, \quad g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4.$

$\boxed{\text{A1}}$ Построить полиномы наименьшей степени с комплексными коэффициентами по данным корням:
a) двойной корень 2, простые корни 3 и $1 - 2i$;
b) двойной корень i, простые корни $-3 + 4i$ и 2.

$\boxed{\text{A2}}$ Построить полиномы наименьшей степени с действительными коэффициентами по данным корням:
a) двойной корень 2, простые корни 3 и $1 - 2i$;
b) двойной корень i, простые корни $-3 + 4i$ и 2.

$\boxed{\text{A3}}$ Разложить многочлены на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$:

$$1)\ x^4 + 9; \qquad 2)\ x^6 - 8.$$

$\boxed{\text{A4}}$ Доказать, что если $\dfrac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами, то $p \mid a_n$, $q \mid a_0$.

$\boxed{\text{A5}}$ Найти рациональные корни многочлена:

$$f(x) = x^5 - x^4 - 6x^3 - x^2 + x + 6.$$

$\boxed{\text{ФС 649: 3)}}$ Доказать, что если $\dfrac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами, то при любом целом m число $p - mq$ есть делитель $f(m)$. В частности, $p - q$ есть делитель $f(1)$, $p + q$ — делитель $f(-1)$.

Домашнее задание № 4
Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

Пользуясь расширенным алгоритмом Евклида, подобрать полиномы $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x),$$

где $d(x)$ — наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$. Сделать проверку.

ФС 578b $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2.$

ФС 578e $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6, \quad g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2.$

Пользуясь расширенным алгоритмом Евклида, убедиться в том, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ взаимно простые, и подобрать полиномы $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$. Сделать проверку.

ФС 579b $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, \quad g(x) = x^2 - x - 1.$

ФС 592 Построить полиномы наименьшей степени с вещественными коэффициентами по данным корням:
a) двойной корень 1, простые 2, 3 и $1 + i$;
b) тройной корень $2 - 3i$;
c) двойной корень i, простой $-1 - i$.

ФС 590 Разложить на неприводимые вещественные множители полиномы:
a) $x^4 + 4$; b) $x^6 + 27$; c*) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$.

ФС 649: 1),2) Доказать, что если $\dfrac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами, то 1) $q|a_0$ (q есть делитель a_0), 2) $p|a_n$.

Следствие из 649, 1) Доказать: если $a \in \mathbb{Z}$ и $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{Z}$, то $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{Q}$. Отсюда, например, сразу получается, что $\sqrt{24} \notin \mathbb{Q}$ и $\sqrt[3]{54} \notin \mathbb{Q}$.

ФС 650 Найти рациональные корни многочленов:
a) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;
b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$.

ФС 651 Доказать, что полином $f(x)$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечётные числа.