5-е занятие. Рациональные корни многочленов. Векторные пространства Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

ФС 649: 3) Доказать, что если $\frac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами, то при любом целом m число $p - mq$ есть делитель $f(m)$. В частности, $p - q$ есть делитель $f(1)$, $p + q$ — делитель $f(-1)$.

Найти рациональные корни многочленов:

A1 $6x^5 + 17x^4 + 19x^3 + 14x^2 - 12x - 8$.

A2 $6x^5 - 13x^4 - 14x^3 + 36x^2 - 5x - 6$.

Примеры векторных пространств

A3 Перечислить аксиомы векторного пространства.

В следующих примерах необходимо выяснить, является ли множество L с определёнными операциями сложения элементов и умножения элементов на число векторным пространством.

A4 $L = \{x \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\tau,\ x_j > 0,\ j \in \overline{1, n}\}$; векторные операции покоординатные (как в $\mathbb{R}^n$);

A5 L такое же, а операции следующие:

$$x + y = (x_1y_1, \ldots, x_ny_n)^\tau, \qquad \alpha x = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)^\tau.$$

A6 $M_2(F)$ — матрицы порядка 2 над полем F;
$(\alpha A)_{i,j} = \alpha A_{i,j}$, $(A + B)_{i,j} = -A_{i,j} - B_{i,j}$.

A7 $L = P_n(F)$ — многочлены степени не выше n над полем F;
сложение обычное, умножение на число такое:
если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, то $(\alpha f)(x) = \alpha a_1x^{n-1} + \ldots + \alpha a_n$;

A8 $C([a, b], \mathbb{R})$ — непрерывные отображения $[a, b]$ в $\mathbb{R}$.

A9 Множество всех векторов двумерной плоскости $V^2(0)$, концы которых лежат на данной прямой.

Домашнее задание № 5
Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

$\boxed{\text{ФС 651}}$ Доказать, что полином $f(x)$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечётные числа.

$\boxed{\text{ФС 650}}$ Найти рациональные корни многочленов:

d) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;

h) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;

e*) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$.

Примеры векторных пространств

Основные задачники:

Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 384 с.: ил.

Кряквин В. Д. Линейная алгебра в задачах и упражнениях. — 2-е изд., — М.: Вузовская книга, 2007. — 588 с.

Выяснить, является ли линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ следующая совокупность векторов (с обычными линейными операциями):

$\boxed{\text{П 1285}}$ $\mathbb{Z}^n$ — все векторы n-мерного пространства с целыми координатами.

$\boxed{\text{П 1286}}$ Все векторы плоскости $V^2(0)$, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy.

$\boxed{\text{П 1289}}$ Все векторы трёхмерного пространства $V^3(0)$, концы которых не лежат на данной прямой.

$\boxed{\text{П 1290}}$ Все векторы пространства $V^2(0)$, концы которых лежат в первой четверти системы координат.

$\boxed{\text{А1}}$ Все чётные непрерывные функции на сегменте $[-1, 1]$.

$\boxed{\text{А2}}$ Все возрастающие непрерывные функции на сегменте $[0, 1]$.

$\boxed{\text{А3}}$ Все монотонные (возрастающие или убывающие) функции на сегменте $[0, 1]$.