6-е занятие. Линейная зависимость
Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

Примеры векторных пространств

$\boxed{\text{A1}}$ $C([a,b],\mathbb{R})$ — множество непрерывных отображений $[a,b]$ в $\mathbb{R}$ с поточечными операциями: $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$, $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$.

$\boxed{\text{A2}}$ Множество всех векторов двумерной плоскости $V^2(0)$, концы которых лежат на данной прямой ℓ.

$\boxed{\text{A3}}$ Множество $P_n(F)$ многочленов степени не выше n над полем F с обычной операцией сложения и следующей операцией умножения на скаляр:
если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, то $(\alpha f)(x) = \alpha a_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha a_n$;

Линейная зависимость системы векторов

$\boxed{\text{A4}}$ Пусть a, b — элементы векторного пространства L над полем F. Доказать, что следующие системы векторов линейно зависимы (лз):
1) $a, b, \mu_1 a + \mu_2 b$, где $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$; 2) $a, b, 0$;
3) $\alpha_1 a + \beta_1 b$, $\alpha_2 a + \beta_2 b$, $\alpha_3 a + \beta_3 b$.

$\boxed{\text{A5}}$ Пусть a, b — лнз векторы векторного пространства L над полем $\mathbb{Q}$. Доказать, что система векторов $a + 2b$, $3a - b$ лнз.

Выяснить, является ли система векторов пространства L лз. Если система лз, то найти коэффициенты какой-нибудь нетривиальной нулевой комбинации и сделать проверку.

$\boxed{\text{A6}}$ $L = \mathbb{Q}^5$,

$$a_1 = (1, 1, -1, 2, 3)^\tau, \qquad a_2 = (2, 0, 1, -1, 2)^\tau,$$
$$a_3 = (-1, 3, -1, 2, 2)^\tau, \qquad a_4 = (1, -1, -2, 3, 2)^\tau.$$

$\boxed{\text{A7}}$ $L = \mathbb{Q}^4$,

$$a_1 = (1, 1, 0, -1)^\tau, \qquad a_2 = (-3, -3, -2, 4)^\tau,$$
$$a_3 = (-2, 0, 1, 1)^\tau, \qquad a_4 = (4, 1, 3, 1)^\tau.$$

$\boxed{\text{A8}}$ $L = P_4(\mathbb{Q})$,

$$f_1(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 2x + 3, \qquad f_2(x) = 2x^4 + x^2 - x + 2,$$
$$f_3(x) = -3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x + 1, \qquad f_4(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 2.$$

$\boxed{\text{A9}}$ $L = M_2(\mathbb{Q})$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Домашнее задание № 6
Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

Выяснить, является ли линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ следующая совокупность векторов (с обычными линейными операциями):

$\boxed{\text{П 1286}}$ Все векторы плоскости $V^2(0)$, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy.

$\boxed{\text{П 1289}}$ Все векторы трёхмерного пространства $V^3(0)$, концы которых не лежат на данной прямой.

$\boxed{\text{П 1290}}$ Все векторы пространства $V^2(0)$, концы которых лежат в первой четверти системы координат.

В следующих заданиях нужно выяснить, является ли система векторов пространства L линейно зависимой. Если система линейно зависима, то найти коэффициенты какой-нибудь нетривиальной нулевой комбинации и сделать проверку.

$\boxed{\text{A1}}$ $L = \mathbb{R}^4$, $a_1 = (3, -2, 1, 2)^\tau$, $a_2 = (-2, 1, 3, 1)^\tau$, $a_3 = (-1, 0, 2, 3)^\tau$, $a_4 = (2, -1, 2, 0)^\tau$.

$\boxed{\text{A2}}$ $L = \mathbb{R}^4$, $a_1 = (2, -1, -3, 4)^\tau$, $a_2 = (3, -1, 2, 3)^\tau$, $a_3 = (-1, 2, 3, 0)^\tau$, $a_4 = (3, 2, -2, 1)^\tau$.

$\boxed{\text{A3}}$ $L = P_2(\mathbb{R})$, $f_1 = 1+2x-3x^2$, $f_2 = 3-x+2x^2$, $f_3 = 3-x^2$, $f_4 = 2+3x-2x^2$.

$\boxed{\text{A4}}$ $L = M_2(\mathbb{R}^2)$, $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A5}}$ Пусть a, b, c — линейно независимые векторы. Доказать, что следующая система векторов линейно независима:

$$a+b-c, \qquad a-b+c, \qquad -a+b+c.$$