

7-е занятие. Исследование системы векторов Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

A1 Выяснить, принадлежит ли \mathbf{b} линейной оболочке $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (3, -1, 2, 2)^\tau; & \mathbf{a}_2 &= (-1, 4, 2, -3)^\tau; \\ \mathbf{a}_3 &= (1, 7, 6, -4)^\tau; & \mathbf{b} &= (3, 10, 10, -5)^\tau. \end{aligned}$$

A2 С помощью определения выяснить, будет ли полной в \mathbb{R}^3 следующая система векторов:

$$\mathbf{a}_1 = (3, -1, 0)^\tau, \quad \mathbf{a}_2 = (-1, 2, 2)^\tau, \quad \mathbf{a}_3 = (1, 3, 4)^\tau.$$

В следующих задачах проверить, является ли система векторов лнз; полной. Сделать вывод, является ли система векторов базисом в L .

A3 $L = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 3)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (3, 2, 1)^\tau$.

A4 $L = \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (3, 1, 2, -3)^\tau, & \mathbf{a}_2 &= (-2, 2, 1, 1)^\tau, & \mathbf{a}_3 &= (-3, 0, -1, 3)^\tau, \\ \mathbf{a}_4 &= (-3, 2, 1, 2)^\tau, & \mathbf{a}_5 &= (2, 3, 3, -3)^\tau. \end{aligned}$$

Полное исследование системы векторов

A5 Пусть $\mathbf{a} = (2, -1, 3, 4)$, $\mathbf{b} = (4, -1, 2, 5)$, $\mathbf{c} = (2, 0, -1, 1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, являются ли лз векторы $A\mathbf{a}$, $A\mathbf{b}$ и $A\mathbf{c}$.

Найти базисную (максимальную лнз) подсистему и ранг системы векторов. Выразить через векторы базисной подсистемы остальные векторы и сделать проверку.

A6 $L = P_4(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} f_1(t) &= -1 + 2t - t^2 + t^3, & f_2(t) &= 2 - 3t - t^2 - t^3, \\ f_3(t) &= 4 - 5t - 4t^2 + 2t^3, & f_4(t) &= 3 - 4t - 2t^2 + 2t^3, \\ f_5(t) &= 2 - t - 6t^2 + 4t^3. \end{aligned}$$

A7 $L = P_2(\mathbb{C})$, $f_1(t) = 1 - t + 2t^2$, $f_2(t) = 2 + 3t - t^2$, $f_3(t) = -1 + 6t - 7t^2$.

Домашнее задание № 7

Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

К 32 а, б Проверить, будет ли система векторов полной в \mathbb{R}^3 .

а) $\mathbf{a}_1 = (-1, 0, -1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3, 2, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (2, -6, -1)^\tau$.

б) $\mathbf{a}_1 = (-3, 1, 4)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (1, -3, 0)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-4, -2, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (0, -2, 2)^\tau$.

К 33 а, б Проверить, является ли система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ базисом в \mathbb{R}^3 .

а) $\mathbf{a}_1 = (3, 0, -4)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (2, 4, 4)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (-3, -4, 2)^\tau$.

б) $\mathbf{a}_1 = (2, 3, -2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-2, -2, -3)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (6, 7, 4)^\tau$.

К 36 а, б Проверить, является ли система матриц базисом в $M_2(\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Полное исследование системы векторов

Найти ранг и базисную (максимальную лнз) подсистему системы векторов. Остальные векторы исходной системы выразить через векторы базисной подсистемы. Сделать проверку.

К 50 а $L = \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (0, 0, 0, 0)^\tau, & \mathbf{a}_2 &= (0, 1, -1, -2)^\tau, & \mathbf{a}_3 &= (0, -2, 2, 4)^\tau, \\ \mathbf{a}_4 &= (0, 2, -2, -4)^\tau, & \mathbf{a}_5 &= (1, -2, 1, 0)^\tau, & \mathbf{a}_6 &= (3, -3, 0, -6)^\tau. \end{aligned}$$

К 51 б $L = P_2(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + x + 2, & f_2(x) &= -2x^2 - 2x - 4, & f_3(x) &= -x^2 + x - 1, \\ f_4(x) &= 2x^2 + 4x + 5, & f_5(x) &= 3x^2 - x - 1. \end{aligned}$$

Дополнительное задание

А1 Доказать, что следующая система функций в пространстве $C([0, 1])$ является лнз системой векторов:

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{2x}, \quad f_3(x) = e^{5x}.$$

Наводящие соображения. Нужно из тождества для функций получить систему уравнений для коэффициентов. Что приятнее всего делать с экспонентами? Либо сразу подставлять $x = 0$, либо дифференцировать и подставлять $x = 0$.