

12-е занятие. Квадратичные формы

Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

Переход от матричной записи к координатной и обратно

А1) Найти $Q(x) = x_e^T Q_e x_e$, если $Q_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

А2) Найти Q_e , если дана координатная запись Q :

$$Q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 - 5x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Исследование на знакоопределённость с помощью критерия Сильвестра

Найти значения параметра λ , при которых следующие квадратичные формы положительно определены:

П 1214) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$. ($\det Q_e = -5\lambda^2 - 4\lambda$.)

П 1215) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$. ($\det Q_e = -\lambda^2 + 30\lambda - 105$.)

Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному виду методом Лагранжа

Упростить выражение: $(a + b + c)^2$. Дополнить до полного квадрата:

$$a^2 - 4ab + 6ac, \quad 2a^2 - 6ab + 10ac, \quad 3a^2 - 4ab + 10ac.$$

Привести квадратичную форму к нормальному виду (над полем \mathbb{R}):

П 1175) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
(Ответ: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.)

Понятия: индекс инерции (ранг), положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатура.

П 1177) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$. (Ответ: $y_1^2 - y_2^2$.)

Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм:

П 1180) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.
(Ответ: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{6}y_3$, $x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}y_3$.)

П 1182) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
(Ответ: $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$.)

Домашнее задание № 12

Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

Задачник: И. В. Проскуряков «Сборник задач по линейной алгебре».

Критерий Сильвестра

Найти все значения параметра λ , при которых положительно определены следующие квадратичные формы. (Указание: записать матрицу квадратичной формы и применить критерий Сильвестра.)

$$\boxed{\text{П 1212}} \quad 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

$$\boxed{\text{П 1213}} \quad 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

$$\boxed{\text{П 1216}} \quad 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Приведение к нормальному виду методом Лагранжа

Найти нормальный вид в области вещественных чисел следующих квадратичных форм:

$$\boxed{\text{П 1176}} \quad x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

$$\boxed{\text{П 1178}} \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм (ввиду неоднозначности искомого линейного преобразования ответ может получиться отличным от приведённого ниже):

$$\boxed{\text{П 1181}} \quad 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

$$\boxed{\text{П 1183}} \quad 2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3.$$

$$\boxed{\text{П 1184}} \quad -12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

$$\boxed{\text{П 1185}} \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1.$$

$\boxed{\text{П 1194}}$ Привести к каноническому виду (коэффициенты при y_i^2 не обязательно равны ± 1) следующую квадратичную форму:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i < j} x_i x_j.$$

Указание. Сначала решить эту задачу для $n = 2, 3, 4$.