12-е занятие. Квадратичные формы
Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

Переход от матричной записи к координатной и обратно

$\boxed{\text{A1}}$ Найти $Q(x) = x_e^\tau Q_e x_e$, если $Q_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A2}}$ Найти Q_e, если дана координатная запись Q:

$$Q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 - 5x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Исследование на знакоопределённость с помощью критерия Сильвестра

Найти значения параметра λ, при которых следующие квадратичные формы положительно определены:

$\boxed{\text{П 1214}}$ $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$ $\quad$ ($\det Q_e = -5\lambda^2 - 4\lambda$.)

$\boxed{\text{П 1215}}$ $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3.$ $\quad$ ($\det Q_e = -\lambda^2+30\lambda-105$.)

Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному виду методом Лагранжа

Упростить выражение: $(a + b + c)^2$. Дополнить до полного квадрата:

$$a^2 - 4ab + 6ac, \qquad 2a^2 - 6ab + 10ac, \qquad 3a^2 - 4ab + 10ac.$$

Привести квадратичную форму к нормальному виду (над полем $\mathbb{R}$):

$\boxed{\text{П 1175}}$ $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$
(Ответ: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.)

Понятия: индекс инерции (ранг), положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатура.

$\boxed{\text{П 1177}}$ $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$ $\quad$ (Ответ: $y_1^2 - y_2^2$.)

Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм:

$\boxed{\text{П 1180}}$ $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$
(Ответ: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{6}y_3$, $x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}y_3$.)

$\boxed{\text{П 1182}}$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$
(Ответ: $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$.)

Домашнее задание № 12
Линейная алгебра, прикл. матем., 2-й семестр

Задачник: И. В. Проскуряков «Сборник задач по линейной алгебре».

Критерий Сильвестра

Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы. (Указание: записать матрицу квадратичной формы и применить критерий Сильвестра.)

$\boxed{\text{П 1212}}$ $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

$\boxed{\text{П 1213}}$ $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3.$

$\boxed{\text{П 1216}}$ $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$

Приведение к нормальному виду методом Лагранжа

Найти нормальный вид в области вещественных чисел следующих квадратичных форм:

$\boxed{\text{П 1176}}$ $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$

$\boxed{\text{П 1178}}$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$

Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм (ввиду неоднозначности искомого линейного преобразования ответ может получиться отличным от приведённого ниже):

$\boxed{\text{П 1181}}$ $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$

$\boxed{\text{П 1183}}$ $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3.$

$\boxed{\text{П 1184}}$ $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3.$

$\boxed{\text{П 1185}}$ $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1.$

$\boxed{\text{П 1194}}$ Привести к каноническому виду (коэффициенты при y_i^2 не обязательно равны ± 1) следующую квадратичную форму:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} x_ix_j.$$

Указание. Сначала решить эту задачу для $n = 2, 3, 4$.