Мех.-мат., алг. и геом., 2-й семестр
2-е занятие. Многочлены

$\boxed{552а}$ Пользуясь схемой Горнера, разложить на простейшие дроби:

$$\frac{x^3 - x + 1}{(x-2)^5}.$$

Указание: разложить числитель по степеням $(x-2)$ и поделить почленно.

$\boxed{\text{A1}}$ Построить полиномы наименьшей степени с комплексными (а затем с вещественными) коэффициентами по данным корням:
a) двойной корень 2, простые корни 3 и $1 - 2i$;
b) двойной корень i, простые корни $-3 + 4i$ и 2.

$\boxed{\text{A2}}$ Разложить на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$:
(1) $x^4 + 9$; (2) $x^6 - 8$; (3) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 1$ (идея).

$\boxed{\text{649: 3)}}$ Доказать, что если $\dfrac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами, то $p - mq$ есть делитель $f(m)$ при любом целом m. В частности, $p - q$ есть делитель $f(1)$, $p + q$ — делитель $f(-1)$.

$\boxed{\text{A4}}$ Найти рациональные корни:
a) $x^5 - x^4 - 6x^3 - x^2 + x + 6$;
b) $6x^5 + 17x^4 + 19x^3 + 14x^2 - 12x - 8$;
c) $6x^6 - 31x^5 + 67x^4 - 109x^3 + 135x^2 - 48x - 36$.

Домашнее задание № 2
Алг. и геом., мех.-мат., 2-й семестр

Задачи взяты из задачника Фаддеева и Соминского (издание 2001 г.) Звёздочкой отмечены задачи для тех, кто претендует на оценки «хорошо» или «отлично».

$\boxed{552b}$ Пользуясь схемой Горнера, разложить на простейшие дроби:

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x+1)^5}.$$

$\boxed{592}$ Построить полиномы наименьшей степени с вещественными коэффициентами по данным корням:
a) двойной корень 1, простые 2, 3 и $1 + i$;
b) тройной корень $2 - 3i$;
c) двойной корень i, простой $-1 - i$.

$\boxed{590}$ Разложить на неприводимые вещественные множители полиномы:
a) $x^4 + 4$; b) $x^6 + 27$; c*) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$.
Для тех, кто умеет извлекать корни n-й степени из комплексных чисел:
f*) $x^{2n} + x^n + 1$.

$\boxed{649\text{: } 1),2)}$ Доказать, что если $\dfrac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами, то 1) $q|a_0$ (q есть делитель a_0), 2) $p|a_n$.

$\boxed{\text{Следствие из 649, 1)}}$ Доказать: если $a \in \mathbb{Z}$ и $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{Z}$, то $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{Q}$. Отсюда, например, сразу получается, что $\sqrt{24} \notin \mathbb{Q}$ и $\sqrt[3]{54} \notin \mathbb{Q}$.

$\boxed{650}$ Найти рациональные корни многочленов:
a) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;
b) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;
d) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;
h) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;
e*) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$.

$\boxed{651}$ Доказать, что полином $f(x)$ с целыми коэффициентами не имеет целых корней, если $f(0)$ и $f(1)$ — нечётные числа.