

Мех.-мат. Алг. и геом., 2-й семестр  
3-е занятие. Векторы.

[1018] В равнобочной трапеции  $ABCD$  известно нижнее основание  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ , боковая сторона  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$  и угол между ними  $\angle A = \pi/3$ . Разложить по  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  все векторы, составляющие остальные стороны и диагонали трапеции.

[1022] В тетраэдре  $ABCD$  даны рёбра, выходящие из вершины  $A$ :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{d}.$$

Выразить через эти векторы остальные рёбра тетраэдра, медиану  $\overrightarrow{DM}$  грани  $BCD$  и вектор  $\overrightarrow{AQ}$ , где  $Q$  — центр тяжести грани  $BCD$ .

[1026] Разложить вектор  $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  по трём некопланарным векторам:  $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ ,  $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$  и  $\vec{p} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$ .

### Скалярное произведение

[1030, часть] Проверить, справедливы ли следующие равенства:

1)  $\vec{a}\vec{a} = a^2$ ; 4)  $\vec{a}(\vec{a}\vec{b}) = a^2\vec{b}$ ; 8)  $(\vec{a}\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$ .

[1031] Доказать тождество параллелограмма:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(a^2 + b^2).$$

[1034] Вычислить скалярное произведение  $\vec{a}\vec{b}$ , если  $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$  и  $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$ , где  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

### Векторное произведение

[1077] Разложить вектор  $\vec{P} = [3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}, \vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}]$  по взаимно перпендикулярным ортам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , образующим правую тройку.

[1064] При каком значении коэффициента  $\alpha$  векторы  $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$  и  $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$  окажутся коллинеарными, если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны?

[1076] Зная две стороны треугольника  $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$  и  $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$ , вычислить длину его высоты  $\overrightarrow{CD}$  при условии, что  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  — перпендикулярные друг другу орты.

## Домашнее задание № 3

### Мех.-мат. Алг. и геом., 2-й семестр

Задачи взяты из задачника О. Н. Цубербиллер.

[1017] В ромбе  $ABCD$  даны диагонали  $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$  и  $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ . Разложить по этим двум векторам все векторы, совпадающие со сторонами ромба:  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  и  $\overrightarrow{DA}$ .

[1021] На трёх некопланарных векторах  $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{q}$  и  $\overrightarrow{AA'} = \vec{r}$  построен параллелепипед  $ABCD A'B'C'D'$ . Выразить через  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$  и  $\vec{r}$  векторы, совпадающие со всеми остальными рёбрами (хотя бы 4 из 9), диагоналями (4) и диагоналями граней этого пар-да (хотя бы 4 из 12).

[1025] Найти линейную зависимость между данными четырьмя некопланарными векторами:

$$\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{p} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{n} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \vec{q} = \vec{b} - \vec{c}.$$

[1030] Проверить, справедливы ли следующие равенства:

$$2) \vec{a}^2 \vec{a} = a^3; \quad 3) a^2 \vec{a} = a^3; \quad 5) \vec{a}(\vec{b}\vec{b}) = \vec{a}b^2; \\ 6) (\vec{a} \pm \vec{b})^2 = a^2 + b^2 \pm 2\vec{a}\vec{b} \quad 7) (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2;$$

[1035] Найти числовое значение скаляра  $3m - 2(\vec{m}\vec{n}) + 4n^2$ , если  $|\vec{m}| = 1/3$ ,  $|\vec{n}| = 6$  и  $\widehat{\vec{m}\vec{n}} = \pi/3$ .

[1038] Вычислить скалярное произведение двух векторов  $\vec{p}\vec{q}$ , зная их разложение по трём единичным взаимно перпендикулярным векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ :  $\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ ;  $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$ .

[1043] Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$  и  $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ , если известно, что  $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\vec{q}| = 3$  и  $\widehat{\vec{p}\vec{q}} = \pi/4$ .

[1046] Вычислить угол между векторами  $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$  и  $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$ , где  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

[1075] Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$  и  $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$ , где  $m = 5$ ,  $n = 3$  и  $\widehat{\vec{m}\vec{n}} = \pi/6$ .

[1078] Дан вектор  $\vec{Q} = [3\vec{m} + 4\vec{n} + 5\vec{p}, \vec{m} + 6\vec{n} + 4\vec{p}]$ , где  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{p}$  — взаимно перпендикулярные векторы, образующие правую тройку. Вычислить его длину. Решить задачу для случая, когда  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{p}$  — левая тройка.