

Мех.-мат. Алг. и геом., 2-й семестр
4-е занятие. Векторы.

[1047] В прямоугольном равнобедренном \triangle проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить угол между ними.

[1076] Зная две стороны треугольника $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$, вычислить длину его высоты \overrightarrow{CD} при условии, что \vec{p} и \vec{q} — перпендикулярные друг другу орты.

[1079] Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на данных векторах

$$\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n} - \vec{p} \quad \text{и} \quad \vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n} + \vec{p},$$

где \vec{m} , \vec{n} и \vec{p} — взаимно перпендикулярные орты.

Смешанное произведение: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$

[1085] Вычислить высоту параллелограмма, построенного на трёх векторах:

$$\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q} - 5\vec{r}, \quad \vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + 4\vec{r}, \quad \vec{c} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r},$$

если за основание взят параллелограмм, построенный на \vec{a} и \vec{b} . Известно, что \vec{p} , \vec{q} и \vec{r} — взаимно перпендикулярные орты.

[1086, 1)] Проверить, компланарны ли данные векторы, заданные координатами в ОНБ (ортонормированном базисе):

$$\vec{p} = \{1; -2; 1\}, \quad \vec{q} = \{3; 1; -2\}, \quad \vec{r} = \{7; 14; -13\}.$$

Двойное векторное произведение: $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}] = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c})\vec{a}$

[G1] Вычислить двумя способами двойное векторное произведение $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$, зная координаты векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} в ОНБ:

$$\vec{a} = \{-2; 1; -3\}, \quad \vec{b} = \{1; -1; 2\}, \quad \vec{c} = \{3; 1; -1\}.$$

[G2] Пусть AH — высота $\triangle ABC$. Доказать, что

$$\overrightarrow{AH} = \frac{[[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}], \overrightarrow{BC}]}{|\overrightarrow{BC}|^2} = \frac{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}|^2}.$$

Вычислить \overrightarrow{AH} , если $A(1; -2; 3)$, $B(2; 1; -2)$, $C(-1; 0; 2)$.

[1090] Доказать компланарность \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , зная, что $[\vec{a}\vec{b}] + [\vec{b}\vec{c}] + [\vec{c}\vec{a}] = \vec{0}$.

Домашнее задание № 4

Мех.-мат. Алг. и геом., 2-й семестр

1056 Даны разложения векторов, служащих сторонами Δ , по двум взаимно перпендикулярным ортам:

$$\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 2\vec{b}, \quad \overrightarrow{BC} = 2\vec{a} - 4\vec{b}, \quad \overrightarrow{CA} = -7\vec{a} + 2\vec{b}.$$

Вычислить длину медианы \overrightarrow{AM} и высоты \overrightarrow{AD} треугольника ABC .

1048 Зная векторы, образующие Δ :

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}, \quad \overrightarrow{CA} = -3\vec{a} - \vec{b},$$

где \vec{a} и \vec{b} — взаимно перпендикулярные орты, определить углы этого Δ .

1116, 1116* Зная векторы, совпадающие с двумя сторонами Δ :

$$\overrightarrow{AB}\{2; 1; -2\}, \quad \overrightarrow{BC}\{3; 2; 6\},$$

вычислить углы этого Δ и его площадь.

1080 Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = 3\vec{p} - 12\vec{q} + 4\vec{r}$ на ось, имеющую направление вектора $\vec{b} = [\vec{p} - 2\vec{r}, \vec{p} + 3\vec{q} - 4\vec{r}]$.

1087 Доказать тождество Якоби: $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}] + [[\vec{b}\vec{c}]\vec{a}] + [[\vec{c}\vec{a}]\vec{b}] = \vec{0}$.

1086: 2,3 Проверить, компланарны ли данные векторы ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — взаимно перпендикулярные орты):

2) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}, \vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}, \vec{r} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$.

3) $\vec{p} = [\vec{a}\vec{m}], \vec{q} = [\vec{b}\vec{m}], \vec{r} = [\vec{c}\vec{m}]$.

1084 Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах:

1) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}, \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$ и $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, где \vec{p}, \vec{q} и \vec{r} — взаимно перпендикулярные орты;

2) $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n}, \vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}, \vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 1/2, |\vec{n}| = 3, \widehat{\vec{m}\vec{n}} = 135^\circ$.

G1 Вычислить двумя способами двойное векторное произведение $[[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]$, зная координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в ОНБ:

$$\vec{a} = \{3; -2; 2\}, \quad \vec{b} = \{1; -3; -2\}, \quad \vec{c} = \{-2; 1; 3\}.$$

G2 Пусть AH — высота ΔABC . Вычислить \overrightarrow{AH} , если $A(-2; 3; -1), B(1; 3; -2), C(4; 1; -2)$. Вычислив \overrightarrow{AH} , проверить соотношения:

$$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 0, \quad \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AH}|.$$