Мех.-мат. Алг. и геом., 2-й семестр
8-е занятие. Линейные пространства.

$\boxed{\text{A1}}$ В следующих примерах необходимо выяснить, является ли множество L с определёнными операциями сложения элементов и умножения элементов на число линейным пространством.

1) $L = \{x \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\tau,\ x_j > 0,\ j \in \overline{1,n}\}$; векторные операции покоординатные (как в $\mathbb{R}^n$);
2) L такое же, а операции следующие:

$$x + y = (x_1y_1, \ldots, x_ny_n)^\tau, \qquad \alpha x = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)^\tau.$$

3) $M_2(\mathbb{R})$; $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$, $(A+B)_{ij} = -A_{ij} - B_{ij}$.
4) $L = P_n(\mathbb{C})$, сложение обычное, умножение на число такое: если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, то $(\alpha f)(x) = \alpha a_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha a_n$;
5) $C([a,b])$.
6) множество всех векторов плоскости $V^2(0)$, концы которых лежат на данной прямой.

$\boxed{\text{A2}}$ Пусть a, b — некоторые векторы линейного пространства L над полем $\mathbb{R}$. Доказать, что следующие системы векторов линейно зависимы:
1) $a, b, \mu_1 a + \mu_2 b$, где $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$; 2) $a, b, 0$;
3) $\alpha_1 a + \beta_1 b$, $\alpha_2 a + \beta_2 b$, $\alpha_3 a + \beta_3 b$.

$\boxed{\text{A3}}$ Пусть a, b — линейно независимые векторы линейного пространства L над полем $\mathbb{R}$. Доказать, что система векторов $a + 2b$, $3a - b$ линейно независима.

$\boxed{\text{A4}}$ Выяснить, является ли система векторов линейно независимой.

1) $L = \mathbb{R}^5$, $a_1 = (1, 1, -1, 2, 3)^\tau$, $a_2 = (2, 0, 1, -1, 2)^\tau$, $a_3 = (-1, 3, -1, 2, 2)^\tau$, $a_4 = (1, -1, -2, 3, 2)^\tau$;
2) $L = \mathbb{R}^4$,

$$a_1 = (1, 1, 0, -1)^\tau, \qquad a_2 = (-3, -3, -2, 4)^\tau,$$
$$a_3 = (-2, 0, 1, 1)^\tau, \qquad a_4 = (4, 1, 3, 1)^\tau;$$

3) $L = P_4(\mathbb{R})$,

$$f_1 = x^4 + x^3 - x^2 + 2x + 3, \qquad f_2 = 2x^4 + x^2 - x + 2,$$
$$f_3 = -3x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x + 1, \qquad f_4 = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 2;$$

4) $L = M_2(\mathbb{R})$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
5) $L = C([0,1])$, $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{2t}$, $\ldots$, $f_n(t) = e^{nt}$.

Домашнее задание № 8
Мех.-мат. Алг. и геом., 2-й семестр

И. В. Проскуряков «Сборник задач по линейной алгебре»,
И. М. Глазман, Ю. И. Любич «Конечномерный лин-й анализ в задачах».

Выяснить, является ли линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ следующая совокупность векторов (с обычными линейными операциями):

$\boxed{1285}$ $\mathbb{Z}^n$ — все векторы n-мерного пространства с целыми координатами.

$\boxed{1286}$ Все векторы плоскости $V^2(0)$, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy.

$\boxed{1289}$ Все векторы трёхмерного пространства $V^3(0)$, концы которых не лежат на данной прямой.

$\boxed{1290}$ Все векторы пространства $V^2(0)$, концы которых лежат в первой четверти системы координат.

$\boxed{\text{A1}}$ Все чётные непрерывные функции на сегменте $[-1, 1]$.

$\boxed{\text{A2}}$ Все монотонные непрерывные функции на сегменте $[0, 1]$.

В следующих заданиях нужно выяснить, является ли система векторов пространства L линейно зависимой. Если система линейно зависима, то найти коэффициенты какой-нибудь нетривиальной нулевой комбинации и сделать проверку.

$\boxed{\text{A3}}$ $L = \mathbb{R}^4$, $a_1 = (3, -2, 1, 2)^\tau$, $a_2 = (-2, 1, 3, 1)^\tau$, $a_3 = (-1, 0, 2, 3)^\tau$, $a_4 = (2, -1, 2, 0)^\tau$;

$\boxed{\text{A4}}$ $L = \mathbb{R}^4$, $a_1 = (2, -1, -3, 4)^\tau$, $a_2 = (3, -1, 2, 3)^\tau$, $a_3 = (-1, 2, 3, 0)^\tau$, $a_4 = (3, 2, -2, 1)^\tau$;

$\boxed{\text{A5}}$ $L = P_2(\mathbb{R})$, $f_1 = 1 + 2x - 3x^2$, $f_2 = 3 - x + 2x^2$, $f_3 = 3 - x^2$, $f_4 = 2 + 3x - 2x^2$.

$\boxed{\text{A6}}$ $L = M_2(\mathbb{R}^2)$, $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A7}}$ $L = C([0, 1])$, $f_0 = 1$, $f_1 = \cos x$, $f_2 = \cos 2x$, $f_3 = \cos 3x$.

$\boxed{\text{A8}}$ Пусть a, b, c — линейно независимые векторы. Доказать, что следующая система векторов линейно независима:

$$a + b - c, \qquad a - b + c, \qquad -a + b + c.$$