Мех.-мат. Алг. и геом., 2-й семестр
9-е занятие. Свойства систем векторов

$\boxed{\text{A1 (повтор.)}}$ Выяснить, является ли система векторов лнз:
$L = M_2(\mathbb{R})$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{1312}$ Описать линейную оболочку системы векторов с помощью системы линейных уравнений:
$a_1 = (1, -1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0, 1)$, $a_3 = (2, 0, 1, 1)$.

В следующих задачах проверить, является ли система векторов лнз; полной. Сделать вывод, является система векторов базисом в L.

$\boxed{\text{A2}}$ $L = \mathbb{R}^3$, $a_1 = (1, -2, 3)$, $a_2 = (3, 2, 1)$.

$\boxed{\text{A3}}$ $L = \mathbb{R}^4$, $a_1 = (3, 1, 2, -3)$, $a_2 = (-2, 2, 1, 1)$,
$a_3 = (-3, 0, -1, 3)$, $a_4 = (-3, 2, 1, 2)$, $a_5 = (2, 3, 3, -3)$.

$\boxed{\text{A4}}$ $L = \mathbb{R}^4$, $a_1 = (-2, 1, 3, 2)$, $a_2 = (3, 0, 2, 1)$,
$a_3 = (1, -2, 3, 1)$, $a_4 = (2, 3, 1, -2)$.

$\boxed{\text{A5}}$ $L = P_2(\mathbb{C})$, $f_1(t) = 1 - t + 2t^2$, $f_2(t) = 2 + 3t - t^2$, $f_3(t) = -1 + 6t - 7t^2$.

$\boxed{\text{A6}}$ Пусть $a = (2, -1, 3, 4)$, $b = (4, -1, 2, 5)$, $c = (2, 0, -1, 1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить, являются ли лз векторы Aa, Ab и Ac.

$\boxed{\text{A7}}$ Найти базисную (максимальную лнз) подсистему и ранг системы векторов. Выразить через векторы базисной подсистемы остальные векторы и сделать проверку. $L = P_4(\mathbb{C})$,

$$f_1(t) = -1 + 2t - t^2 + t^3, \qquad f_2(t) = 2 - 3t - t^2 - t^3,$$

$$f_3(t) = 4 - 5t - 4t^2 + 2t^3, \qquad f_4(t) = 3 - 4t - 2t^2 + 2t^3,$$

$$f_5(t) = 2 - t - 6t^2 + 4t^3.$$

Домашнее задание № 9
Мех.-мат. Алг. и геом., 2-й семестр

$\boxed{1313}$ Описать линейную оболочку системы векторов системой линейных уравнений:
$a_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0, 3)$,
$a_3 = (3, 1, 1, -1, 7)$, $a_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$.

Выяснить, является ли система лнз; полной; базисом.

$\boxed{\text{A1}}$ $L = \mathbb{R}^4$, $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (2, 1, 2, -2)$,
$a_3 = (-2, -2, 0, 9)$, $a_4 = (1, -2, 1, 1)$, $a_5 = (3, 7, 7, 5)$.

$\boxed{\text{A2}}$ $L = M_2(\mathbb{C})$, $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, $A_3 = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A_4 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

$\boxed{\text{A3}}$ $L = P_3(\mathbb{C})$, $p_1(t) = 3 + t + 2t^2 + 3t^3$, $p_2(t) = 2 - 2t - t^2 - t^3$,
$p_3(t) = -3 - t^2 + 3t^3$, $p_4(t) = 2 + 3t + 3t^2 - 3t^3$.

Найти ранг и базисную (максимальную лнз) подсистему системы векторов; остальные векторы исходной системы выразить через векторы найденной подсистемы. Сделать проверку.

$\boxed{\text{ФСн 928a}}$ $f_1 = (2, 2, 7, -1)$, $f_2 = (3, -1, 2, 4)$, $f_3 = (1, 1, 3, 1)$.

$\boxed{\text{ФСн 928c}}$ $f_1 = (2, 3, -4, -1)$, $f_2 = (1, -2, 1, 3)$,
$f_3 = (5, -3, -1, 8)$, $f_4 = (3, 8, -9, -5)$.

$\boxed{\text{ФСн 928g}}$ $f_1 = (2, 3, 5, -4, 1)$, $f_2 = (1, -1, 2, 3, 5)$,
$f_3 = (3, 7, 8, -11, -3)$, $f_4 = (1, -1, 1, -2, 3)$.

$\boxed{\text{ФСн 933a}}$ Найти базис и размерность подпространства $\mathbb{R}^4$, натянутого на данную систему векторов:
$f_1 = (2, 1, 3, 1)$, $\qquad f_2 = (1, 2, 0, 1)$, $\qquad f_3 = (-1, 1, -3, 0)$.

Теоретические упражнения на понимание определений:

$\boxed{\text{T1}}$ Пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — система векторов. Доказать, что для её подсистемы $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$ $(k \leqslant n)$ следующие условия равносильны:
(a) любой вектор a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выражается через векторы $a_1, \ldots, a_k$ единственным образом;
(b) любой вектор a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выражается через векторы $a_1, \ldots, a_k$, и векторы $a_1, \ldots, a_k$ лз.

$\boxed{\text{T2}}$ Пусть $u, v \in \ell(a_1, \ldots, a_n)$, причём $v \notin \ell(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Доказать, что существует такое число α, что $u - \alpha v \in \ell(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

$\boxed{\text{T3}}$ Доказать с помощью Т2 основную лемму линейной алгебры:
если $b_1, \ldots, b_{n+1} \in \ell(a_1, \ldots, a_n)$, то $b_1, \ldots, b_{n+1}$ лз.
(Индукция по n; использовать Т2 для доказательства инд. перехода.)