Линейная алгебра, 3-й семестр (прикл. мат.)
1-е занятие. Квадратичная форма

Найти значения параметра λ, при которых следующие квадратичные формы положительно определены:

$\boxed{1214}$ $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$.
$\det B_e = -5\lambda^2 - 4\lambda$.

$\boxed{1215}$ $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 10 x_1 x_3 + 6 x_2 x_3$.
$\det B_e = -\lambda^2 + 30\lambda - 105$.

Упростить выражение: $(a+b+c)^2$.

Дополнить до полного квадрата: $a^2 - 4ab + 6ac$, $2a^2 - 6ab + 10ac$, $3a^2 - 4ab + 10ac$, $2a^2 + 5ab - 8ac$.

Привести к нормальному виду (над полем действительных чисел) следующие квадратичные формы.

$\boxed{1175}$ $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$.
Ответ: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

Понятия: индекс инерции (ранг), положительный и отрицательный индексы инерции, сигнатура.

$\boxed{1177}$ $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 6x_2 x_3$.
Ответ: $y_1^2 - y_2^2$.

Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм:

$\boxed{1180}$ $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1 x_2 - 4x_1 x_3$.
Ответ: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{6}y_3$, $x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3$, $x_3 = \frac{1}{3}y_3$.

$\boxed{1182}$ $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$.
Ответ: $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$.

Домашнее задание № 1 по алгебре, 3-й семестр

Задачник: И. В. Проскуряков “Сборник задач по линейной алгебре”.

Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы. (Указание: записать матрицу квадратичной формы и применить критерий Сильвестра.)

$\boxed{1212}$ $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

$\boxed{1213}$ $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.

$\boxed{1216}$ $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Найти нормальный вид в области вещественных чисел следующих квадратичных форм:

$\boxed{1176}$ $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

$\boxed{1178}$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.

Найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм (ввиду неоднозначности искомого линейного преобразования ответ может получиться отличным от приведённого ниже):

$\boxed{1181}$ $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

$\boxed{1183}$ $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

$\boxed{1184}$ $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.

$\boxed{1185}$ $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

$\boxed{1194}$ Привести к каноническому виду (коэффициенты при y_i^2 не обязательно равны ± 1) следующую квадратичную форму:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j.$$

Указание. Сначала решите эту задачу для $n = 2, 3, 4$.

Ответы

$\boxed{1212}$ $\lambda > 2$.

$\boxed{1213}$ $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$.

$\boxed{1216}$ Требуемых значений λ не существует.

$\boxed{1176}$ $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

$\boxed{1181}$ $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = \frac{1}{2}y_1 + y_2$, $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = -y_2 + y_3$.

$\boxed{1183}$ $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 - \frac{5\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_3$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_3$, $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y_3$.

$\boxed{1184}$ $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}y_3$, $x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$, $x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$.

$\boxed{1185}$ $y_1^2 - y_2^2$; $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_4$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$.

$\boxed{1194}$ $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \frac{5}{8}y_4^2 + \ldots + \frac{n+1}{2n}y_n^2$.