Линейная алгебра, 3-й семестр (прикл. мат.)
2-е занятие. Матрица линейного оператора

$\boxed{1436}$ Доказать, что проектирование трёхмерного пространства на координатную ось вектора e_1 параллельно координатной плоскости векторов e_2 и e_3 является линейным преобразованием, и найти его матрицу в базисе e_1, e_2, e_3.

$\boxed{1434}$ Доказать, что поворот плоскости на угол α вокруг начала координат является линейным преобразованием, и найти матрицу этого преобразования в любом ортонормированном базисе, если положительное направление отсчёта углов совпадает с направлением кратчайшего поворота, переводящего первый базисный вектор во второй.

Выяснить, какие из следующих преобразований φ, заданных путём задания координат вектора φx как функций координат вектора x, являются линейными, и в случае линейности найти их матрицы в том же базисе, в котором заданы координаты векторов x и φx.

$$\boxed{1441}\, \varphi x = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3).$$

$$\boxed{1442}\, \varphi x = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2).$$

$\boxed{1445}$ Доказать, что существует единственное линейное преобразование трёхмерного пространства, переводящее векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в b_1, b_2, b_3, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 3, 5), & b_1 &= (1, 1, 1); \\ a_2 &= (0, 1, 2), & b_2 &= (1, 1, -1); \\ a_3 &= (1, 0, 0), & b_3 &= (2, 1, 2). \end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1449,\text{ а}}$ Показать, что умножение квадратных матриц второго порядка слева на данную матрицу $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ является линейным преобразованием пространства всех матриц второго порядка, и найти матрицу этого преобразования в базисе, состоящем из матриц:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$\boxed{1450}$ Показать, что дифференцирование является линейным преобразованием пространства всех многочленов степени $\leqslant 3$ от одного неизвестного с вещественными коэффициентами. Найти матрицу этого преобразования в базисе

а) $1, x, x^2, x^3$;

б) $1, x-c, \frac{(x-c)^2}{2!}, \frac{(x-c)^3}{3!}$, где c — вещественное число.

$\boxed{1452}$ Линейное преобразование A в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе:

а) e_1, e_3, e_2, e_4;

б) $e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4$.

Ответ:

$$\begin{pmatrix}-2&0&1&0\\1&-4&-8&-7\\1&4&6&4\\1&3&4&7\end{pmatrix}$$

Домашнее задание по алгебре № 2.
Алгебра, 3-й семестр (прикл. мат.)

$\boxed{1437}$ Доказать, что проектирование трёхмерного пространства на координатную плоскость векторов e_1, e_2 параллельно оси координат вектора e_3 является линейным преобразованием, и найти его матрицу в базисе e_1, e_2, e_3.

$\boxed{1439}$ Пусть пространство $\mathbb{R}^n$ есть прямая сумма линейных подпространств L_1 с базисом $a_1, \ldots, a_k$ и L_2 с базисом $a_{k+1}, \ldots, a_n$. Доказать, что проектирование пространства на L_1 параллельно L_2 является линейным преобразованием, и найти матрицу этого преобразования в базисе $a_1, \ldots, a_n$.

Выяснить, какие из следующих преобразований φ, заданных путём задания координат вектора φx как функций координат вектора x, являются линейными, и в случае линейности найти их матрицы в том же базисе, в котором заданы координаты векторов x и φx.

$$\boxed{1443}\ \varphi x = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2);$$

$$\boxed{1444}\ \varphi x = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2).$$

$\boxed{1446}$ Доказать, что существует единственное линейное преобразование трёхмерного пространства, переводящее векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в b_1, b_2, b_3, и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 0, 3), & b_1 &= (1, 2, -1), \\ a_2 &= (4, 1, 5), & b_2 &= (4, 5, -2), \\ a_3 &= (3, 1, 2), & b_3 &= (1, -1, 1). \end{aligned}$$

$\boxed{1449,\ б}$ Показать, что умножение квадратных матриц второго порядка справа на данную матрицу $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ является линейным преобразованием пространства всех матриц второго порядка, и найти матрицу этого преобразования в базисе, состоящем из матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису:

$$A_u = P_{u\to e} A_e P_{e\to u}, \qquad \text{т. е.} \qquad A_u = P_{e\to u}^{-1} A_e P_{e\to u}.$$

$\boxed{1455}$ Доказать, что матрицы одного и того же линейного преобразования в двух базисах тогда и только тогда совпадают, когда матрица перехода от одного из этих базисов к другому перестановочна с матрицей этого линейного преобразования в одном из данных базисов.

В наших обозначениях: $A_e = A_u \iff A_e P_{e\to u} = A_e P_{e\to u}$.

$\boxed{1453}$ Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \qquad f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \qquad f_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

Ответы

$$\boxed{1446}\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{1449,\text{ б}}\ \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{1453}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$