Линейная алгебра, 3-й семестр (прикл. мат.)
3-е занятие. Матрица линейного оператора

Изменение матрицы оператора при изменении базиса.

$\boxed{\text{A1}}$ Линейный оператор A в базисе e имеет матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -4 \\ 15 & 6 & 5 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе

$$f_1 = -e_1 + e_2 + e_3, \qquad f_2 = 2e_1 - 5e_2 - 2e_e, \qquad f_3 = -e_1 + 5e_2.$$

$\boxed{1456}$ Доказать, что любое линейное преобразование φ одномерного пространства сводится к умножению всех векторов на одно и то же число, т. е. $\varphi x = \alpha x$ для любого вектора x.

$\boxed{1459}$ Пусть D — линейное преобразование пространства многочленов степени $\leqslant n$ с вещественными коэффициентами, переводящее каждый многочлен в его производную. Показать, что $\varphi^{n+1} = 0$.

$\boxed{1460}$ Пусть D — линейное преобразование дифференцирования, а M — умножение на x в бесконечномерном пространстве P всех многочленов от x с вещественными коэффициентами. Доказать, что $DM^n - M^n D = nM^{n-1}$.

Ядро оператора, образ оператора.

Дана матрица A_e оператора A в базисе e. Построить какой-нибудь базис в ядре оператора A и какой-нибудь базис в образе A.

$$A_e = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}; \qquad A_e = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 14 & 24 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Связь между размерностью ядра и размерностью образа.

$\boxed{\text{T3}}$ Пусть оператор A действует в пространстве L; $a_1, \ldots, a_k \in L$, причём система $Aa_1, \ldots, Aa_k$ линейно независима. Доказать, что система $a_1, \ldots, a_k$ линейно независима.

Домашнее задание по алгебре № 3.
Алгебра, 3-й семестр (прикл. мат.)

$\boxed{1452}$ Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого же преобразования в базисе

$$e_1, \qquad e_1 + e_2, \qquad e_1 + e_2 + e_3, \qquad e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

$\boxed{1457}$ Пусть преобразование φ в базисе $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, 3)$ имеет матрицу $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, а преобразование ψ в базисе $b_1 = (3, 1)$, $b_2 = (4, 2)$ имеет матрицу $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{smallmatrix}\right)$. Найти матрицу преобразования $\varphi + \psi$ в базисе b_1, b_2.

$\boxed{1458}$ Преобразование A в базисе $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ имеет матрицу $A_a = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а преобразование B в базисе $b_1 = (6, -7)$, $b_2 = (-5, 6)$ имеет матрицу $B_b = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования AB в том базисе e, в котором даны координаты всех векторов.

Пусть дана матрица оператора A в базисе $e = (e_1, \ldots, e_4)$. Найти какой-нибудь базис в ядре и какой-нибудь базис в образе оператора A (двумя способами: строчным и столбцовым). Найти $\dim\ker A$ (дефект) и $\dim\operatorname{im} A$ (ранг) и проверить для них основную формулу.

$$\boxed{\text{H1}}\ A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{H2}}\ A_e = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 7 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ -4 & 5 & 3 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

В следующих теоретических упражнениях предполагается, что линейный оператор A действует в конечномерном линейном пространстве L.

$\boxed{\text{T1}}$ Доказать, что следующие условия равносильны:

(a) для любых $x, y \in L$ из равенства $Ax = Ay$ следует равенство $x = y$ (т. е. оператор A инъективен);

(b) $\ker A = \{0\}$, т. е. из $Ax = 0$ следует $x = 0$.

$\boxed{\text{T2}}$ Пусть $(u_1, \dots, u_k)$ — линейно зависимая система в L. Доказать, что система векторов $(Au_1, \dots, Au_k)$ также линейно зависима.

$\boxed{\text{T3}}$ Пусть $u_1, \dots, u_k \in L$, причём система $(Au_1, \dots, Au_k)$ линейно независима. Доказать, что система $(u_1, \dots, u_k)$ также линейно независима.

$\boxed{\text{T4}}$ Пусть $u_1, \dots, u_k$ — линейно независимая система в L, а оператор A инъективный. Доказать, что система $Au_1, \dots, Au_k$ также линейно независима.

$\boxed{\text{T5}}$ Пусть $x, y \in L$. Доказать: $Ax = Ay \iff x - y \in \ker A$.

$\boxed{\text{T6}}$ Пусть $u_1, \dots, u_r \in L$, причём $(Au_1, \dots, Au_r)$ — базис в пространстве $\operatorname{im} A$. Дан вектор $x \in L$. Найти такой вектор $y \in L$, принадлежащий линейной оболочке векторов $u_1, \dots, u_r$, что $x - y \in \ker A$.

$\boxed{\text{T7}}$ Пусть $u_1, \dots, u_r \in L$, причём $(Aa_1, \dots, Aa_r)$ — базис в пространстве $\operatorname{im} A$. Далее, пусть $(e_1, \dots, e_k)$ — базис в пространстве $\ker A$. Доказать, что $(e_1, \dots, e_k, a_1, \dots, a_r)$ — базис в пространстве L.

$\boxed{\text{T8}}$ Доказать формулу: $\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim L$.

Ответы и указания

$\boxed{1452}$ $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\boxed{1457}$ $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29\frac{1}{2} & -25 \end{pmatrix}$, $\boxed{1458}$ $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$.

Указание к T3: вывести логически из T2.

Указание к T6: $Ax \in \operatorname{im} A$, поэтому Ax можно разложить по базису $\operatorname{im} A$. Воспользоваться этими коэффициентами для построения y.

Указание к T7: доказать, что $(e_1, \dots, e_k, a_1, \dots, a_r)$ — полная и линейно независимая система в L. В процессе доказательства пользоваться предыдущими задачами.

Указание к T8: пусть $(b_1, \dots, b_r)$ — базис в $\operatorname{im} A$; взять такие a_j, что $b_j = Aa_j$ (пояснить, почему они существуют), и применить задачу T7.