Линейная алгебра, 3-й семестр (прикл. мат.)
4-е занятие. Линейные операторы. Собственные числа и собственные векторы

$\boxed{\text{A1}}$ Найти базис ядра и базис образа линейного оператора A, заданного в базисе e матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 9 & -7 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A2}}$ Найти базис ядра и базис образа линейного оператора A, действующего в пространстве матриц $M_2(\mathbb{C})$ по правилу

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A3}}$ Критерий обратимости линейного оператора.

$\boxed{\text{A4}}$ Определение собственного числа.

$\boxed{\text{A5}}$ Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора:

$$A_e = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 18 & 1 & 6 \\ 22 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A6}}$ Найти собственные числа и собственные векторы:

$$A_e = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -20 & 3 & -16 \\ -10 & 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание № 4.
Алгебра, 3-й семестр (прикл. мат.)

$\boxed{\text{A1}}$ Найти базис ядра и базис образа линейного оператора A, заданного в базисе $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 7 & -4 \\ -1 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A2}}$ Найти базис ядра и базис образа линейного оператора A, действующего в пространстве матриц $M_2(\mathbb{C})$ по правилу

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В следующих задачах предполагается, что линейный оператор A задан в некотором базисе матрицей. Найти собственные значения и собственные векторы оператора A и сделать проверки. В том случае, если собственные векторы оператора A образуют базис в исходном линейном пространстве, найти матрицу оператора A в этом базисе.

$$\boxed{1468}\ A_e = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1469}\ A_e = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{И 6.1.3}}$ (Из задачника Икрамова.) Доказать, что если оператор A невырожден (обратим), то A и A^{-1} имеют одни и те же собственные векторы. Найти связь между собственными значениями этих операторов.

$\boxed{\text{T1}}$ Пусть L — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, e — базис в L, A — линейный оператор в L, $\lambda \in \mathbb{C}$. Доказать, что следующие условия равносильны:

(a) оператор $(A - \lambda I)$ необратим;

(b) $\det(A_e - \lambda E) = 0$;

(c) λ — собственное число оператора A, т. е. существует такой вектор $x \neq 0$, что $Ax = \lambda x$;

(d) $r(A_e - \lambda E) < n$, где r — ранг.