Линейная алгебра, 3-й семестр (прикл. мат.)
5-е занятие. Собств. значения и собств. векторы. Операторы простой структуры

В следующих заданиях нужно найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Если оператор имеет простую структуру, привести его к диагональному виду.

$$\boxed{\text{A1}}\ A_e = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{A2}}\ A_e = \begin{pmatrix} 20 & -1 & 22 \\ 10 & -2 & 10 \\ -17 & 1 & -19 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{A3}}\ A_e = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{1463}$ Пусть x — собственный вектор линейного оператора A, принадлежащий собственному значению λ; f — многочлен. Доказать, что x — собственный вектор оператора $f(A)$, принадлежащий собственному значению $f(\lambda)$.

$\boxed{1475}$ Доказать, что собственные векторы линейного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы.

Домашнее задание № 5.
Алгебра, 3-й семестр (прикл. мат.)

В следующих заданиях нужно найти собственные значения и собственные векторы, а также выяснить, существует ли базис, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид. Если да, то найти этот базис и соответствующую ему матрицу. Рекомендуется делать проверки.

$$\boxed{1479}\ A_e = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boxed{1480}\ A_e = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{1481}\ A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boxed{\text{H1}}\ A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{1478}$ Доказать, что матрица линейного оператора в некотором базисе является диагональной $\iff$ базис состоит из собственных векторов данного оператора.

$\boxed{\text{T0}}$ Найти спектры операторов A и A^2, если

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Попробовать сформулировать гипотезу.

$\boxed{\text{T1}}$ Найти A^k, где $A = J_n(\lambda)$ — жорданова клетка порядка n (λ — некоторое число):

$$A = J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Провести вычисления для $n = 4$, $k = 2, 3, 4, 5$; затем написать и доказать общую формулу.