Линейная алгебра, 3-й семестр (прикл. мат.)
7-е занятие. Жорданова форма оператора с одноточечным спектром

В следующих задачах нужно найти жорданов базис и жорданову форму оператора, заданного матрицей в некотором базисе. Кроме того, по жордановой форме нужно найти минимальный многочлен оператора.

$$\boxed{\text{A1}}\ \ A_e = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 & 4 \\ 7 & 0 & -4 & 5 \\ -4 & 2 & 6 & -3 \\ -6 & 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{A2}}\ \ A_e = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{A3}}\ \ A_e = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Если успеем: найти степени жордановой клетки $J_n(\lambda)$ (пример Т1 из домашнего задания № 5).

Указание к А1: $\lambda = 3$.

Указание к А2: $\lambda = -1$,

$$B_e^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание к А3: $\lambda = 2$,

$$B_e^2 = \begin{pmatrix} 17 & -4 & 7 & -15 \\ 4 & -2 & 2 & -3 \\ -9 & 0 & -3 & 9 \\ 14 & -4 & 6 & -12 \end{pmatrix}, \qquad B^3 = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание № 7.
Алгебра, 3-й семестр (прикл. мат.)

Линейный оператор A в базисе e задан матрицей A_e. Найти жорданову форму и жорданов базис (базис, в котором оператор имеет жорданову форму). По жордановой форме найти минимальный многочлен.

$$\boxed{1533}\ A_e = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boxed{1534}\ A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boxed{1105}\ A_e = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \boxed{1106}\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{T1}}$ Пусть p — многочлен. Найти матрицу оператора $p(A)$, если

$$A_e = J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Сначала разобрать случай, когда $p(t) = t^k$. Подсказка: $A_e = \lambda E + J_4(0)$, причём $J_4(0)$ нильпотентна. Ключевые слова: бином Ньютона, формула Тейлора.

$\boxed{\text{T2}}$ Найти все матрицы B, обладающие свойством $B^2 = A$, если

$$A = J_2(9) = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Обязательно сделать проверку!

$\boxed{1164}$ Найти все матрицы B, обладающие свойством $B^2 = A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Подсказка: рассматривать A как матрицу оператора в некотором базисе e. Построить жорданов базис u, найти в нём B и вернуться в базис e.