Федеральное агентство по образованию РФ

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего и профессионального образования
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики, механики и компьютерных наук

Кафедра алгебры и дискретной математики

Комплексные числа

Выпускная квалификационная работа
по методике преподавания математики
студента 5 курса очной формы обучения

Е. С. Кочурова

Научный руководитель:
ассистент, к. ф.-м. н. Е. А. Максименко

Ростов-на-Дону

2007

Содержание

0 Введение

Сегодня во многих учебных заведениях изучению комплексных чисел уделяется мало внимания. Считается, что эту тему должны изучать еще в средней школе. Но проходят её только в школах с углубленным изучением математики, да и то не во всех. В высших учебных заведениях комплексным числам также не уделяется должного внимания. Тем, у кого в школе не было комплексных чисел, а в курсе высшей алгебры и ТФКП было слишком мало, ничего не остаётся, кроме как изучать их самостоятельно по учебникам и методичкам. Но такой путь подходит лишь для очень сознательных студентов. Многим же другим удобнее, чтобы выбором задач и проверкой ответов занимался учитель. В случае достаточно простых тем, функции учителя может взять на себя новая автоматизированная система обучения (АСО) «ProblemsGuide». Эта система предлагает ученику задачи и проверяет правильность ответов. Появилась возможность быстро и без каких-либо усилий выявить уровень знаний учащегося, выбрать задачу нужного уровня сложности и проверить правильность ее решения.

Данная методическая работа является теоретической базой для системы «ProblemsGuide». Цель работы — познакомить учащихся с комплексными числами и помочь приобрести основные практические навыки работы с ними. Работа рассчитана на учащихся старших классов средних школ, студентов естественнонаучных факультетов университета, а также всех тех, кто хочет больше узнать о комплексных числах. Учащимся будет предложено большое число практических задач. В процессе их решения возникает неплохой навык работы с комплексными числами.

Хотя основной упор в данной методической работе был сделан на решение практических задач, в ней также содержится теория, необходимая для их решения.

Изложение новых математических понятий по теме «Комплексные числа» опирается на школьный курс и соответствует подготовке старшеклассников.

Вся работа разделена на уроки. Каждый урок представляет собой набор задач и объяснений по небольшой теме и задается XML-файлом. В самом начале файла располагается название урока и краткая аннотация. Затем приводится список умений, требуемых или развиваемых в течение этого урока. Умения делятся на две группы: предварительные и основные. Предполагается, что к началу урока ученик уже должен обладать предварительными умениями, а в течение урока развить основные. Умения располагаются без повторений и в порядке, предпочтительном для изучения. Последнюю и основную часть урока занимает список задач.

Описание каждой задачи имеет следующую структуру: развиваемые умения, необходимые умения, формулировка задачи, ответ и источник задачи. (В данной печатной версии, ради сокращения объёма, не указан источник задачи для задач, составленных автором.)

Каждое умение, указанное в задаче, должно совпадать с одним из элементов списка умений.

Для каждой задачи указан ответ, причем в том виде, в котором пользователь должен его ввести с клавиатуры. Задачи связаны между собой посредством развиваемых и необходимых умений. Сложность задач определяется списком необходимых умений. Задачи располагаются в порядке, предпочтительном для изучения.

При составлении задач были использованы источники [1]–[5].

1 Комплексное число как упорядоченная пара (основные понятия и определения)

Тема урока. Комплексное число, поле комплексных чисел, связь действительных и комплексных чисел, алгебраическая форма комплексного числа, действительная и мнимая части комплексного числа, принцип равенства комплексных чисел, решение уравнения с двумя неизвестными, сопряженное к комплексному числу и модуль комплексного числа.

Список умений «Предполагаемые»

1. Арифметические операции с действительными числами
   используется в задачах: 1, 22, 39
2. Понятие арифметического вектора
   используется в задачах: 0

Список умений «Основные»

1. Определение комплексного числа
   развивается в задачах: 0
   используется в задачах: 1, 17, 22
2. Определение равенства двух комплексных чисел
   развивается в задачах: 0
3. Определение суммы комплексных чисел
   развивается в задачах: 1
   используется в задачах: 2, 3, 4, 5, 6, 16
4. Сложение комплексных чисел
   развивается в задачах: 2, 3, 4, 5, 6
   используется в задачах: 7, 8, 10, 18, 19, 20, 21
5. Нулевое комплексное число
   развивается в задачах: 7
   используется в задачах: 8, 16
6. Противоположное к комплексному числу
   развивается в задачах: 8
   используется в задачах: 9, 10, 16
7. Отыскание противоположного к комплексному числу
   развивается в задачах: 9
8. Определение разности комплексных чисел
   развивается в задачах: 10
   используется в задачах: 11, 12, 13, 14, 15, 16

9. Вычитание комплексных чисел
   развивается в задачах: 11, 12, 13, 14, 15
10. Свойства суммы комплексных чисел
    развивается в задачах: 16
    используется в задачах: 30
11. Понятие действительной и мнимой частей комплексного числа
    развивается в задачах: 17
    используется в задачах: 18, 19, 20, 21, 37, 38, 41
12. Сложение комплексных чисел с нулевой мнимой частью
    развивается в задачах: 18, 19, 20, 21
    используется в задачах: 35
13. Определение произведения комплексных чисел
    развивается в задачах: 22
    используется в задачах: 23, 24, 25, 26, 27
14. Умножение комплексных чисел
    развивается в задачах: 23, 24, 25, 26, 27
    используется в задачах: 28, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 41
15. Единичное комплексное число
    развивается в задачах: 28
16. Свойства произведения комплексных чисел
    развивается в задачах: 29
    используется в задачах: 30
17. Определение частного комплексных чисел
    развивается в задачах: 29
18. Понятие поля комплексных чисел
    развивается в задачах: 30
    используется в задачах: 35
19. Умножение комплексных чисел с нулевой мнимой частью
    развивается в задачах: 31, 32, 33, 34
    используется в задачах: 35
20. Связь действительных и комплексных чисел
    развивается в задачах: 35
21. Понятие мнимой единицы. Умножение мнимой единицы на себя
    развивается в задачах: 36
    используется в задачах: 37
22. Понятие алгебраической формы комплексного числа
    развивается в задачах: 37
    используется в задачах: 38, 39, 40, 41
23. Принцип равенства комплексных чисел
    развивается в задачах: 38

24. Определение суммы комплексных чисел, записанных в алгебраической форме
    развивается в задачах: 39
25. Определение разности комплексных чисел, записанных в алгебраической форме
    развивается в задачах: 39
26. Понятие сопряженного к комплексному числу
    развивается в задачах: 40
27. Понятие абсолютной величины комплексного числа
    развивается в задачах: 40
28. Произведение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме
    развивается в задачах: 41

Задача Complex1-0

- ● Определение комплексного числа
- ● Определение равенства двух комплексных чисел
- ○ Понятие арифметического вектора

Комплексным числом (ударение на букву е) называют упорядоченную пару действительных чисел:

$$z = (x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

По своей природе комплексные числа являются двумерными арифметическими векторами. Числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ считают равными, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$
Множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$
Среди следующих пар комплексных чисел найдите те, в которых числа равны между собой

Ответ (типа 'multichoice'):

- ● $(1, 1), \quad (1, 1)$
- ○ $(3, 2), \quad (2, 3)$
- ● $\left(\frac{3}{5}, \frac{8}{64}\right), \quad \left(\frac{9}{15}, \frac{1}{8}\right)$
- ○ $\left(\frac{8}{10}, -\frac{3}{2}\right), \quad \left(\frac{2}{10}, -\frac{1}{2}\right)$
- ○ $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{10}\right), \quad \left(\frac{25}{100}, \frac{6}{10}\right)$
- ● $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2}, \ \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9}\right), \quad \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{3}\right)$

Задача Complex1-1

- ● Определение суммы комплексных чисел
- ○ Арифметические операции с действительными числами
- ○ Определение комплексного числа

Операция сложения комплексных чисел определяется как сложение арифметических векторов:
Если $z_1 = (x_1, y_1), \quad z_2 = (x_2, y_2)$, то

$$z_1 + z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex1-2

- Сложение комплексных чисел
  - Определение суммы комплексных чисел

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right), \quad \left(\frac{3}{10}, \frac{2}{5}\right)$$

Ответ (типа 'complex'): `(1/2,2)`

Задача Complex1-3

- Сложение комплексных чисел
  - Определение суммы комплексных чисел

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$\left(1\frac{1}{5}, 3\frac{2}{5}\right), \quad \left(5\frac{4}{5}, 6\frac{3}{5}\right)$$

Ответ (типа 'complex'): `(7,10)`

Задача Complex1-4

- Сложение комплексных чисел
  - Определение суммы комплексных чисел

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Ответ (типа 'complex'): `(3/4,7/8)`

Задача Complex1-5

- Сложение комплексных чисел
  - Определение суммы комплексных чисел

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right), \quad \left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}\right)$$

Ответ (типа 'complex'): `(2/5,0)`

Задача Complex1-6

- Сложение комплексных чисел
  - Определение суммы комплексных чисел

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$\left(\frac{11}{5}, \frac{8}{3}\right), \quad \left(-\frac{11}{5}, -\frac{8}{3}\right)$$

Ответ (типа 'complex'): `(0,0)`

Задача Complex1-7

- Нулевое комплексное число
  - Сложение комплексных чисел

Найдите такое комплексное число$w = (x, y)$, чтобы для любого комплексного числа z выполнялось равенство $z+w = z$. Нетрудно видеть, что такое число w единственно. Оно называется *нулевым* комплексным числом и обозначается через 0.

Ответ (типа 'complex'): `(0,0)`

Задача Complex1-8

- Противоположное к комплексному числу
  - Сложение комплексных чисел
  - Нулевое комплексное число

Для комплексного числа $z = (x, y)$ найти такое комплексное число w, что $z + w = 0$. Легко видеть, что такое число w единственно. Оно называется *противоположным* к z и обозначается через $-z$.

Ответ (типа 'complex'): `(-x,-y)`

Задача Complex1-9

- Отыскание противоположного к комплексному числу
  - Противоположное к комплексному числу

Для комплексного числа $z = (3, -5)$ найти противоположное число

Ответ (типа 'complex'): `(-3,5)`

Задача Complex1-10

- Определение разности комплексных чисел
  - Сложение комплексных чисел
  - Противоположное к комплексному числу

Поскольку для каждого комплексного числа существует противоположное к нему число, операцию вычитания комплексных чисел модно определить следующим образом:

$$z_1 - z_2 \stackrel{\text{def}}{=} z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex1-11

- Вычитание комплексных чисел
  - Определение разности комплексных чисел

Найдите разность двух комплексных чисел:

$$\left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right), \quad \left(\frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right)$$

Из первого числа следует вычесть второе.

Ответ (типа 'complex'): `(0,-1/10)`

Задача Complex1-12

- Вычитание комплексных чисел
  - Определение разности комплексных чисел

Найдите разность двух комплексных чисел:

$$\left(1\frac{9}{10}, \frac{5}{10}\right), \quad \left(1\frac{4}{10}, 1\right)$$

Из первого числа следует вычесть второе.

Ответ (типа 'complex'): `(1/2,-1/2)`

Задача Complex1-13

- Вычитание комплексных чисел
  - Определение разности комплексных чисел

Найдите разность двух комплексных чисел:

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{4}{3}\right), \quad \left(\frac{7}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

Из первого числа следует вычесть второе.

Ответ (типа 'complex'): `(1,2/3)`

Задача Complex1-14

- Вычитание комплексных чисел
  - Определение разности комплексных чисел

Найдите разность двух комплексных чисел:

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right), \quad \left(-1, \frac{1}{4}\right)$$

Из первого числа следует вычесть второе.

Ответ (типа 'complex'): `(1/2,-1)`

Задача Complex1-15

- Вычитание комплексных чисел
  - Определение разности комплексных чисел

Найдите разность двух комплексных чисел:

$$\left(\frac{1}{9}, \frac{3}{8}\right), \quad \left(-\frac{5}{9}, \frac{1}{4}\right)$$

Из первого числа следует вычесть второе.

Ответ (типа 'complex'): `(2/3,1/8)`

Задача Complex1-16

- Свойства суммы комплексных чисел
  - Определение суммы комплексных чисел
  - Нулевое комплексное число
  - Противоположное к комплексному числу
  - Определение разности комплексных чисел

Сложение комплексных чисел обладает всеми свойствами сложения арифметических векторов: оно коммутативно, ассоциативно, обладает нулем $0 = (0, 0)$, и для каждого числа z существует противоположное ему число $-z$
Эти свойства записываются следующим образом:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

$$\exists 0 \in \mathbb{C} \ : \ z + 0 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\forall z = (x, y) \in \mathbb{C} \quad \exists - z \in \mathbb{C} \ : \ z + (-z) = 0$$

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex1-17

- Понятие действительной и мнимой частей комплексного числа
- ○ Определение комплексного числа

Число x называют действительной частью комплексного числа $z = (x, y)$. Обозначают $\mathrm{Re}\, z$.

Число y называют мнимой частью комплексного числа $z = (x, y)$. Обозначают $\mathrm{Im}\, z$.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex1-18

- Сложение комплексных чисел с нулевой мнимой частью
- ○ Сложение комплексных чисел
- ○ Понятие действительной и мнимой частей комплексного числа

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$(x, 0), \quad (y, 0)$$

Ответ (типа 'complex'): `(x+y,0)`

Задача Complex1-19

- Сложение комплексных чисел с нулевой мнимой частью
- ○ Сложение комплексных чисел
- ○ Понятие действительной и мнимой частей комплексного числа

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$(5, 0), \quad (-6, 0)$$

Ответ (типа 'complex'): (-1,0)

Задача Complex1-20

- Сложение комплексных чисел с нулевой мнимой частью
- ○ Сложение комплексных чисел
- ○ Понятие действительной и мнимой частей комплексного числа

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$(-3, 0), \quad (4, 0)$$

Ответ (типа 'complex'): (1,0)

Задача Complex1-21

- Сложение комплексных чисел с нулевой мнимой частью
- ○ Понятие действительной и мнимой частей комплексного числа
- ○ Сложение комплексных чисел

Как Вы могли заметить, сумма комплексных чисел с нулевой мнимой частью снова является комплексным числом с нулевой мнимой частью.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex1-22

- Определение произведения комплексных чисел
- ○ Арифметические операции с действительными числами
- ○ Определение комплексного числа

Произведением комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называют комплексное число

$$z_1 z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex1-23

- Умножение комплексных чисел
- ○ Определение произведения комплексных чисел

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$(1,1), \quad (-1,-1)$$

Ответ (типа 'complex'): `(0,-2)`

Задача Complex1-24

- Умножение комплексных чисел
- ○ Определение произведения комплексных чисел

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$(1,0), \quad (-1,0)$$

Ответ (типа 'complex'): `(-1,0)`

Задача Complex1-25

- Умножение комплексных чисел
- ○ Определение произведения комплексных чисел

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right), \quad (2,2)$$

Ответ (типа 'complex'): `(2,0)`

Задача Complex1-26

- Умножение комплексных чисел
- ○ Определение произведения комплексных чисел

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Ответ (типа 'complex'): `(1/9,2/9)`

Задача Complex1-27

- Умножение комплексных чисел
  - Определение произведения комплексных чисел

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Ответ (типа 'complex'): `(-1/2,-3/2)`

Задача Complex1-28

- Единичное комплексное число
  - Умножение комплексных чисел

Найдите такое комплексное число$e = (x, y)$, чтобы для любого комплексного числа z выполнялось равенство $z \cdot e = z$. Нетрудно видеть, что такое число e единственно. Оно называется *единичным* комплексным числом и обозначается через 1.

Ответ (типа 'complex'): `(1,0)`

Задача Complex1-29

- Свойства произведения комплексных чисел
- Определение частного комплексных чисел
  - Умножение комплексных чисел

Умножение комплексных чисел коммутативно, ассоциативно, обладает единицей 1 и каждое число $z = (x, y)$, отличное от 0, обладает обратным z^{-1}. Эти свойства записываются следующим образом:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

$$\exists 1 \in \mathbb{C} \ : \ z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\forall z = (x, y) \in \mathbb{C}, z \neq 0 \ \exists z^{-1} \in \mathbb{C} \ : \ z z^{-1} = 1$$

Последнее свойство позволяет определить операцию деления комплексных чисел. Для того, чтобы разделить комплексное число z_1 на коплексное число $z_2 \neq 0$, необходимо умножить число z_1 на число, обратное к z_2. О том, как делить комплексные числа, будет сказано далее.

Кроме того, для комплексных чисел выполняется свойство дистрибутивности:

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

$$(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

Ответ (типа '`void`'): не требуется

Задача Complex1-30

- Понятие поля комплексных чисел
  - Свойства суммы комплексных чисел
  - Свойства произведения комплексных чисел

Выполнение перечисленных свойств(аксиом) для сложения, умножения и аксиом дистрибутивности означает, что множество всех комплекных чисел образует *поле* относительно операций сложения и умножения. Поле коплексных чисел обозначают символом $\mathbb{C}$

Ответ (типа '`void`'): не требуется

Задача Complex1-31

- Умножение комплексных чисел с нулевой мнимой частью
  - Умножение комплексных чисел

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$(x, 0), \quad (y, 0)$$

Ответ (типа '`complex`'): `(xy,0)`

Задача Complex1-32

- Умножение комплексных чисел с нулевой мнимой частью
  - Умножение комплексных чисел

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$(x, 0), \quad (y, 0)$$

Ответ (типа '`complex`'): `(xy,0)`

Задача Complex1-33

- Умножение комплексных чисел с нулевой мнимой частью
  - Умножение комплексных чисел

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$(5, 0), \quad (-3, 0)$$

Ответ (типа '`complex`'): `(-15,0)`

Задача Complex1-34

- Умножение комплексных чисел с нулевой мнимой частью
- ◦ Умножение комплексных чисел

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$(2,0), \quad (2,0)$$

Ответ (типа 'complex'): (4,0)

Задача Complex1-35

- Связь действительных и комплексных чисел
- ◦ Понятие поля комплексных чисел
- ◦ Сложение комплексных чисел с нулевой мнимой частью
- ◦ Умножение комплексных чисел с нулевой мнимой частью

Как Вы могли заметить, произведение и сумма комплексных чисел с нулевой мнимой частью снова является комплексным числом с нулевой мнимой частью. Таким образом, множество всех комплексных чисел вида $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$ образует подполе,изоморфное полю действительных чисел. Другими словами, любое комплексное число вида $(x,0)$ можно отождествить с действительным числом x.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex1-36

- Понятие мнимой единицы. Умножение мнимой единицы на себя
- ◦ Умножение комплексных чисел

Обозначим через i комплексное число $(0,1)$. Число i называют мнимой единицей. Найдите значение выражения: $i \cdot i$

Ответ (типа 'complex'): (-1,0)

Задача Complex1-37

- Понятие алгебраической формы комплексного числа
- ◦ Понятие действительной и мнимой частей комплексного числа
- ◦ Понятие мнимой единицы. Умножение мнимой единицы на себя

Нетрудно видеть, что любое комплексное число $z = (x,y)$ представимо в виде:

$$z = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy$$

Такую форму записи называют алгебраической формой комплексного числа.

Числа вида iy называют чисто мнимыми.

Как Вы уже могли убедиться,

$$i^2 = (-1, 0) = -(1, 0) = -1$$

Напомним, что:

Число x называют действительной частью комплексного числа $z = x + iy$. Обозначают $\operatorname{Re} z$.

Число y называют мнимой частью комплексного числа $z = x + iy$. Обозначают $\operatorname{Im} z$.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex1-38

- Принцип равенства комплексных чисел
- ○ Понятие алгебраической формы комплексного числа
- ○ Понятие действительной и мнимой частей комплексного числа

Из сказанного выше следует принцип равенства комплексных чисел: два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z_1 = Imz_2$, т.е. тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex1-39

- Определение суммы комплексных чисел, записанных в алгебраической форме
- Определение разности комплексных чисел, записанных в алгебраической форме
- ○ Арифметические операции с действительными числами
- ○ Понятие алгебраической формы комплексного числа

Определения суммы и разности комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, совпадают с уже изученными нами определениями суммы и разности комплексных чисел, а именно: Суммой комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называют комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

. Разностью комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называют комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex1-40

- Понятие сопряженного к комплексному числу
- Понятие абсолютной величины комплексного числа
- ∘ Понятие алгебраической формы комплексного числа

Число $\bar{z} = x - iy$ называют сопряженным коплексному числу $z = x + iy$.
Число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют абсолютной величиной (модулем) комплексного числа $z = x + iy$.
Заметим, что абсолютная величина (модуль) любого комплексного числа всегда является действительным числом.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex1-41

- Произведение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме
- ∘ Умножение комплексных чисел
- ∘ Понятие алгебраической формы комплексного числа
- ∘ Понятие действительной и мнимой частей комплексного числа

Определение произведения комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, совпадает с уже изученными нами определением произведения комплексных чисел. А именно, произведение комплексных чисел $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$ имеет вид:

$$(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Вообще, для того, чтобы найти произведение двух комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, можно не запоминать эту формулу. Достаточно почленно перемножить эти числа и привести подобные слагаемые при действительной и мнимой частях полученного комплексного числа. При этом не следует забывать, что $i^2 = -1$.
Например: $(5+3i)(2+7i) = 5\cdot 2 + 5\cdot 7i + 3i\cdot 2 + 3\cdot 7\cdot i^2 = 10 + 35i + 6i - 21 = -11 + 41i$

Ответ (типа 'void'): не требуется

2 Алгебраическая форма комплексного числа: практические навыки

Тема урока. Запись комплексного числа в алгебраической форме, решение уравнений с двумя неизвестными, арифметические операции с комплексными числами, вычисление абсолютной величины комплексного числа и сопряженного к комплексному числу, извлечение квадратного корня из комплексного числа при помощи метода неопределенных коэффициентов, решение квадратных уравнений в поле комплексных чисел.

Список умений «Предполагаемые»

1. Решение систем уравнений с вещественными коэффициентами
   используется в задачах: 0, 50
2. Решение квадратного уравнения в поле действительных чисел
   используется в задачах: 56
3. Решение биквадратных уравнений с вещественными коэффициентами
   используется в задачах: 50
4. Понятие алгебраической формы комплексного числа
   используется в задачах: 44, 45, 46, 47, 48, 49
5. Принцип равенства комплексных чисел
   используется в задачах: 0, 50
6. Определение суммы комплексных чисел, записанных в алгебраической форме
   используется в задачах: 6, 7, 8, 9, 10
7. Определение разности комплексных чисел, записанных в алгебраической форме
   используется в задачах: 11, 12, 13, 14, 15
8. Понятие сопряженного к комплексному числу
   используется в задачах: 16, 17, 18, 19, 20, 31, 32, 33, 34, 35
9. Понятие абсолютной величины комплексного числа
   используется в задачах: 21, 22, 23, 24, 25, 36, 37, 38
10. Произведение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме
    используется в задачах: 26, 27, 28, 29, 30

Список умений «Основные»

1. Применение принципа равенства комплексных чисел к отысканию действительных решений уравнения с двумя неизвестными
   развивается в задачах: 0
   используется в задачах: 1, 2, 3, 4, 5
2. Решение уравнения с двумя неизвестными при помощи принципа равенства комплексных чисел

3. Сложение комплексных чисел в алгебраической форме
   развивается в задачах: 6, 7, 8, 9, 10
4. Вычитание комплексных чисел в алгебраической форме
   развивается в задачах: 11, 12, 13, 14, 15
5. Вычисление сопряженного к комплексному числу
   развивается в задачах: 16, 17, 18, 19, 20
6. Вычисление абсолютной величины комплексного числа
   развивается в задачах: 21, 22, 23, 24, 25
7. Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
   развивается в задачах: 26, 27, 28, 29, 30
   используется в задачах: 31, 32, 33, 34, 35, 38, 50
8. Умножение комплексного числа на сопряженное к нему число
   развивается в задачах: 31, 32, 33, 34, 35
   используется в задачах: 36, 37
9. Связь между произведением сопряженных чисел и модулями этих чисел
   развивается в задачах: 36, 37
   используется в задачах: 38
10. Метод деления комплексных чисел в алгебраической форме
    развивается в задачах: 38
    используется в задачах: 39, 40, 41, 42, 43
11. Деление комплексных чисел в алгебраической форме
    развивается в задачах: 39, 40, 41, 42, 43
12. Арифметические операции с комплексными числами
    развивается в задачах: 38
    используется в задачах: 44, 45, 47, 48, 49, 56
13. Запись данного комплексного числа в алгебраической форме
    развивается в задачах: 44, 45, 46, 47, 48, 49
14. Применение метода неопределенных коэффициентов к извлечению квадратного корня из комплексного числа
    используется в задачах: 51, 52, 53, 54, 55
15. Извлечение квадратного корня из комплексного числа при помощи метода неопределенных коэффициентов
    развивается в задачах: 51, 52, 53, 54, 55
    используется в задачах: 56
16. Метод решения квадратного уравнения в поле комплексных чисел
    развивается в задачах: 56
    используется в задачах: 57, 58, 59, 60, 61
17. Решение квадратного уравнения в поле комплексных чисел
    развивается в задачах: 57, 58, 59, 60, 61

Задача Complex2-0

- Применение принципа равенства комплексных чисел к отысканию действительных решений уравнения с двумя неизвестными
  - Решение систем уравнений с вещественными коэффициентами
  - Принцип равенства комплексных чисел

Оказывается, действительное решение уравнения с двумя неизвестными с комплексными коэффициентами можно найти можно найти при помощи принципа равенства комплексных чисел. Рассмотрим уравнение $c_1x + c_2y = c_3$, где c_1, c_2, c_3-заданные комплексные числа. Для того, чтобы найти действительные решения x и y этого уравнения, необходимо: 1. Переписать уравнение так, чтобы коэффициенты c_1, c_2, c_3 были записаны в алгебраической форме:

$$(\operatorname{Re} c_1 + \operatorname{Im} c_1\ i)x + (\operatorname{Re} c_2 + \operatorname{Im} c_2\ i)y = \operatorname{Re} c_3 + \operatorname{Im} c_3\ i$$

2. Привести подобные члены при действительной и мнимой частях в левой части равенства.

$$(\operatorname{Re} c_1\ x + \operatorname{Re} c_2\ y) + (\operatorname{Im} c_1\ x + \operatorname{Im} c_1\ y)i = \operatorname{Re} c_3 + \operatorname{Im} c_3\ i$$

3. Приравнять действительные и мнимые части равенства. Получим систему двух линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами. Решая эту систему, можно найти решения x и y нашего уравнения, если они существуют.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex2-1

- Решение уравнения с двумя неизвестными при помощи принципа равенства комплексных чисел
  - Применение принципа равенства комплексных чисел к отысканию действительных решений уравнения с двумя неизвестными

Найдите действительные решения уравнения $(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i$

Ответ (типа 'real_list'): `2, 1`

Задача Complex2-2

- Решение уравнения с двумя неизвестными при помощи принципа равенства комплексных чисел
  - Применение принципа равенства комплексных чисел к отысканию действительных решений уравнения с двумя неизвестными

Найдите действительные решения уравнения $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$

Ответ (типа 'real_list'): `20/17,-36/17`

Задача Complex2-3

- Решение уравнения с двумя неизвестными при помощи принципа равенства комплексных чисел
  - Применение принципа равенства комплексных чисел к отысканию действительных решений уравнения с двумя неизвестными

Найдите действительные решения уравнения $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$

Ответ (типа 'real_list'): `-4/11, 5/11`

Задача Complex2-4

- Решение уравнения с двумя неизвестными при помощи принципа равенства комплексных чисел
  - Применение принципа равенства комплексных чисел к отысканию действительных решений уравнения с двумя неизвестными

Найдите действительные решения уравнения $\frac{1}{x+iy-i}+\frac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}$

Ответ (типа 'real_list'): `-1/3, -sqrt(8)/3`

Задача Complex2-5

- Решение уравнения с двумя неизвестными при помощи принципа равенства комплексных чисел
  - Применение принципа равенства комплексных чисел к отысканию действительных решений уравнения с двумя неизвестными

Найдите действительные решения уравнения $(x-iy)(a-ib)=i^5$ где a и b - заданные действительные числа, $|a|\neq|b|$

Ответ (типа 'string_list'): `b/(a^2-b^2),a/(a^2-b^2)`

Задача Complex2-6

- Сложение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Определение суммы комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$1+5i, \quad 2+3i$$

Ответ (типа 'complex'): `(3,8)`

Задача Complex2-7

- Сложение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Определение суммы комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$-1-5i, \quad 3+3i$$

Ответ (типа 'complex'): `(2,-2)`

Задача Complex2-8

- Сложение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Определение суммы комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{2}i, \quad \frac{2}{5}+\frac{1}{2}i$$

Ответ (типа 'complex'): `(1,1)`

Задача Complex2-9

- Сложение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Определение суммы комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$-\frac{4}{9}+\frac{1}{7}i, \quad \frac{1}{9}-\frac{1}{7}i$$

Ответ (типа 'complex'): `(-1/3,0)`

Задача Complex2-10

- Сложение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Определение суммы комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите сумму двух комплексных чисел:

$$-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}i, \quad -\frac{5}{8}-\frac{1}{2}i$$

Ответ (типа 'complex'): `(-3/4,-3/4)`

Задача Complex2-11

- Вычитание комплексных чисел в алгебраической форме
  - Определение разности комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите разность двух комплексных чисел:

$$\frac{4}{5}+\frac{7}{10}i, \quad \frac{3}{10}-\frac{3}{10}i$$

Из первого числа необходимо вычесть второе

Ответ (типа 'complex'): `(1/2,1)`

Задача Complex2-12

- Вычитание комплексных чисел в алгебраической форме
  - Определение разности комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите разность двух комплексных чисел:

$$1+i, \quad 2-i$$

Из первого числа необходимо вычесть второе

Ответ (типа 'complex'): `(-1,2)`

Задача Complex2-13

- Вычитание комплексных чисел в алгебраической форме
  - Определение разности комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите разность двух комплексных чисел:

$$-5-8i, \quad -5-7i$$

Из первого числа необходимо вычесть второе

Ответ (типа 'complex'): `(0,-1)`

Задача Complex2-14

- Вычитание комплексных чисел в алгебраической форме
  - Определение разности комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите разность двух комплексных чисел:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i, \quad -\frac{1}{4}+\frac{1}{3}i$$

Из первого числа необходимо вычесть второе

Ответ (типа 'complex'): `(3/4,1/6)`

Задача Complex2-15

- Вычитание комплексных чисел в алгебраической форме
  - Определение разности комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите разность двух комплексных чисел:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{2}i, \quad \frac{2}{9}-\frac{3}{2}i$$

Из первого числа необходимо вычесть второе

Ответ (типа 'complex'): `(-1/9,2)`

Задача Complex2-16

- Вычисление сопряженного к комплексному числу
  - Понятие сопряженного к комплексному числу

Найдите число, сопряженное к комплексному числу $-5+9i$

Ответ (типа 'complex'): `(-5,-9)`

Задача Complex2-17

- Вычисление сопряженного к комплексному числу
  - Понятие сопряженного к комплексному числу

Найдите число, сопряженное к комплексному числу $5-9i$

Ответ (типа 'complex'): `(5,9)`

Задача Complex2-18

- Вычисление сопряженного к комплексному числу
  - Понятие сопряженного к комплексному числу

Найдите число, сопряженное к комплексному числу $\frac{9}{10}+\frac{18}{15}i$

Ответ (типа 'complex'): `(9/10,-18/15)`

Задача Complex2-19

- Вычисление сопряженного к комплексному числу
  - Понятие сопряженного к комплексному числу

Найдите число, сопряженное к комплексному числу $-\frac{79}{29}-\frac{86}{35}i$

Ответ (типа 'complex'): `(-79/29,86/35)`

Задача Complex2-20

- Вычисление сопряженного к комплексному числу
  - Понятие сопряженного к комплексному числу

Найдите число, сопряженное к комплексному числу $48 + 29i$

Ответ (типа 'complex'): (48,-29)

Задача Complex2-21

- Вычисление абсолютной величины комплексного числа
  - Понятие абсолютной величины комплексного числа

Найдите абсолютную величину комплексного числа $0 + 0 \cdot i$

Ответ (типа 'real'): 0

Задача Complex2-22

- Вычисление абсолютной величины комплексного числа
  - Понятие абсолютной величины комплексного числа

Найдите абсолютную величину комплексного числа $2i$

Ответ (типа 'real'): 2

Задача Complex2-23

- Вычисление абсолютной величины комплексного числа
  - Понятие абсолютной величины комплексного числа

Найдите абсолютную величину комплексного числа $1 + i$

Ответ (типа 'real'): sqrt(2)

Задача Complex2-24

- Вычисление абсолютной величины комплексного числа
  - Понятие абсолютной величины комплексного числа

Найдите абсолютную величину комплексного числа $1 + 3i$

Ответ (типа 'real'): sqrt(10)

Задача Complex2-25

- Вычисление абсолютной величины комплексного числа
  - Понятие абсолютной величины комплексного числа

Найдите абсолютную величину комплексного числа $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Ответ (типа 'real'): 1

Задача Complex2-26

- Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Произведение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$1 + 2i, \quad 2 + i.$$

Ответ (типа 'complex'): `(0,5)`

Задача Complex2-27

- Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Произведение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$1 + 3i, \quad -1 - 3i$$

Ответ (типа 'complex'): `(8,-6)`

Задача Complex2-28

- Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Произведение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите произведение двух комплексных чисел: $\frac{28}{19} + \frac{58}{23}i$, $\frac{85}{57} + \frac{11}{19}i$

Ответ (типа 'complex'): `(0,10/3)`

Задача Complex2-29

- Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Произведение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$\frac{5}{10} + \frac{1}{10}i, \quad 1\frac{5}{10} + \frac{5}{10}i$$

Ответ (типа 'complex'): `(7/10,4/10)`

Задача Complex2-30

- Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Произведение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме

Найдите произведение двух комплексных чисел:

$$i^2, \quad i^3$$

Ответ (типа 'complex'): `(0,1)`

Задача Complex2-31

- Умножение комплексного числа на сопряженное к нему число
  - Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Понятие сопряженного к комплексному числу

Найдите произведение данного комплексного числа и сопряженного к нему $1 + i$

Ответ (типа 'real'): 2

Задача Complex2-32

- Умножение комплексного числа на сопряженное к нему число
  - Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Понятие сопряженного к комплексному числу

Найдите произведение данного комплексного числа и сопряженного к нему: $-9 - i$

Ответ (типа 'real'): 82

Задача Complex2-33

- Умножение комплексного числа на сопряженное к нему число
  - Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Понятие сопряженного к комплексному числу

Найдите произведение данного комплексного числа и сопряженного к нему: $0 + 0 \cdot i$

Ответ (типа 'real'): 0

Задача Complex2-34

- Умножение комплексного числа на сопряженное к нему число
  - Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Понятие сопряженного к комплексному числу

Найдите произведение данного комплексного числа и сопряженного к нему: $-3 + 3i$

Ответ (типа 'real'): 18

Задача Complex2-35

- Умножение комплексного числа на сопряженное к нему число
  - Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Понятие сопряженного к комплексному числу

Найдите произведение данного комплексного числа и сопряженного к нему: $1 + 3i$

Ответ (типа 'real'): 10

Задача Complex2-36

- Связь между произведением сопряженных чисел и модулями этих чисел
- ○ Понятие абсолютной величины комплексного числа
- ○ Умножение комплексного числа на сопряженное к нему число

Чему равно произведение $z \cdot \overline{z}$?

Ответ (типа 'choice'):

- ○ z^2
- ● $|z|^2$
- ○ $|z|$
- ○ $\overline{z}^2$
- ○ $\overline{z^2}$

Задача Complex2-37

- Связь между произведением сопряженных чисел и модулями этих чисел
- ○ Понятие абсолютной величины комплексного числа
- ○ Умножение комплексного числа на сопряженное к нему число

Пусть комплексное число $z = 3 + 4i$. Как связаны между собой величины $z \cdot \overline{z}$ и $|z|^2$?

Ответ (типа 'choice'):

- ○ $z \cdot \overline{z} < |z|^2$
- ● $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- ○ $z \cdot \overline{z} > |z|^2$

Задача Complex2-38

- Метод деления комплексных чисел в алгебраической форме
- Арифметические операции с комплексными числами
- ○ Понятие абсолютной величины комплексного числа
- ○ Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
- ○ Связь между произведением сопряженных чисел и модулями этих чисел

Для того, чтобы разделить комплексное число $z_1 = x_1 + iy_1$ на комплексное число $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, необходимо:
1. Записать частное в виде дроби $\frac{z_1}{z_1} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$
2. Умножить числитель и знаменатель полученной дроби на число, сопряженное к z_2. Получим: $\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$
3. Из формулы $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ следует, что в знаменателе дроби стоит действительное число $|z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$

4. Почленно перемножить стоящие в числителе комплексные числа и привести подобные при действительной и мнимой частях полученного комплексного числа.
5. Разделить действительную и мнимую части числителя на знаменатель. Получим: $z_1 : z_2 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$
Рассмотренный алгоритм позволяет делить комплексные числа.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex2-39

- Деление комплексных чисел в алгебраической форме
  - Метод деления комплексных чисел в алгебраической форме

Найдите частное двух комплексных чисел:

$$1, \quad i.$$

Ответ (типа 'complex'): `(0,-1)`

Задача Complex2-40

- Деление комплексных чисел в алгебраической форме
  - Метод деления комплексных чисел в алгебраической форме

Найдите частное двух комплексных чисел:

$$1 + 3i, \quad 2 + i.$$

Ответ (типа 'complex'): `(1,1)`

Задача Complex2-41

- Деление комплексных чисел в алгебраической форме
  - Метод деления комплексных чисел в алгебраической форме

Найдите частное двух комплексных чисел:

$$12 - 14i, \quad -1 - 3i.$$

(Первое число разделите на второе)

Ответ (типа 'complex'): `(3,5)`

Задача Complex2-42

- Деление комплексных чисел в алгебраической форме
  - Метод деления комплексных чисел в алгебраической форме

Найдите частное двух комплексных чисел:

$$7 + 9i, \quad 1 + 5i.$$

(Первое число разделите на второе)

Ответ (типа 'complex'): `(2,-1)`

Задача Complex2-43

- Деление комплексных чисел в алгебраической форме
  - Метод деления комплексных чисел в алгебраической форме

Найдите частное двух комплексных чисел:

$$-1\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i, \quad \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i.$$

(Первое число разделите на второе)

Ответ (типа 'complex'): `(-2,3)`

Задача Complex2-44

- Запись данного комплексного числа в алгебраической форме
  - Понятие алгебраической формы комплексного числа
  - Арифметические операции с комплексными числами

Запишите данное комплексное число в алгебраической форме

$$\left(\frac{1+2i}{1-3i}\right)^4 + \left(\frac{-1+2i}{1+3i}\right)^2$$

Ответ (типа 'complex'): `(-1/4,1/2)`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex2-45

- Запись данного комплексного числа в алгебраической форме
  - Понятие алгебраической формы комплексного числа
  - Арифметические операции с комплексными числами

Запишите данное комплексное число в алгебраической форме

$$\frac{2+i}{3-i} + \frac{1+i}{4-i}$$

Ответ (типа 'complex'): `(23/34,27/34)`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex2-46

- Запись данного комплексного числа в алгебраической форме
  - Понятие алгебраической формы комплексного числа

Запишите данное комплексное число в алгебраической форме $\left(\frac{2-i}{3-i}\right)^2\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^2$

Ответ (типа 'complex'): `(4/5,3/5)`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex2-47

- Запись данного комплексного числа в алгебраической форме
  - Понятие алгебраической формы комплексного числа
  - Арифметические операции с комплексными числами

Запишите данное комплексное число в алгебраической форме $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}+\frac{1}{i}$

Ответ (типа 'complex'): `(1,-1)`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex2-48

- Запись данного комплексного числа в алгебраической форме
  - Понятие алгебраической формы комплексного числа
  - Арифметические операции с комплексными числами

Запишите данное комплексное число в алгебраической форме $(1+i)^6$

Ответ (типа 'complex'): `(0,-8)`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex2-49

- Запись данного комплексного числа в алгебраической форме
  - Понятие алгебраической формы комплексного числа
  - Арифметические операции с комплексными числами

Запишите данное комплексное число в алгебраической форме $\frac{2-3i}{3+4i}$

Ответ (типа 'complex'): `(-6/25,17/25)`

Задача Complex2-50

- Применение метода неопределенных коэффициентов к извлечению квадратного корня из комплексного числа
  - Решение систем уравнений с вещественными коэффициентами
  - Решение биквадратных уравнений с вещественными коэффициентами
  - Умножение комплексных чисел в алгебраической форме
  - Принцип равенства комплексных чисел

Вычислим значение выражения $\sqrt{a+ib},\ a,b\in\mathbb{R},a^2+b^2\neq 0$. Для решения применим метод неопределенных коэффициентов. Полагаем, что $\sqrt{a+ib}=x+iy,x,y\in\mathbb{R}$. Возводя обе части в квадрат, приходим к уравнению $a+ib=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$, которое равносильно системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{b}{2y} \\ \frac{b^2}{4y^2}-y^2 & = & a \end{array}\right.$$

Значок $\Longleftrightarrow$ означает равносильность. Значения y^2 определяются из биквадратного уравнения $b^2-4y^4=4ay^2$, которое можно переписать в виде $y^4+ay^2-\frac{b^4}{4}=0$. Решая это уравнение, получим: $y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$. Тогда $x_{1,2}=\pm\frac{b}{\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}-a)}}$. Таким образом, выражение A имеет два значения: $A_{1,2}=\pm\frac{b}{\sqrt{2(\sqrt{a^2+b^2}-a)}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i$. Такая запись означает, что решению A_1 соответствует выражение со знаками «+», а решению A_2 соответствует выражение со знаками «-». Избавившись от иррациональности в знаменателе, полученное выражение можно переписать в виде:

$$A_{1,2}=\pm\operatorname{sign}b\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i$$

, где $signb$-знак числа b. Знаки при x,y выбираются так, чтобы выполнялось равенство $2xy=b$. Для решения конкретных примеров необязательно запоминать полученную формулу. Достаточно запомнить лишь сам ход рассуждений.

Ответ (типа '`void`'): не требуется

Задача Complex2-51

- Извлечение квадратного корня из комплексного числа при помощи метода неопределенных коэффициентов
  - Применение метода неопределенных коэффициентов к извлечению квадратного корня из комплексного числа

Вычислить

$$\sqrt{2i}$$

Ответ (типа '`complex_set`'): `(1,1),(-1,-1)`

Задача Complex2-52

- Извлечение квадратного корня из комплексного числа при помощи метода неопределенных коэффициентов
  - Применение метода неопределенных коэффициентов к извлечению квадратного корня из комплексного числа

Вычислить

$$\sqrt{3-4i}$$

Ответ (типа 'complex_set'): `(2,-1),(-2,1)`

Задача Complex2-53

- Извлечение квадратного корня из комплексного числа при помощи метода неопределенных коэффициентов
  - Применение метода неопределенных коэффициентов к извлечению квадратного корня из комплексного числа

Вычислить

$$\sqrt{-\frac{i}{2}}$$

Ответ (типа 'complex_set'): `(1/2,-1/2),(-1/2,1/2)`

Задача Complex2-54

- Извлечение квадратного корня из комплексного числа при помощи метода неопределенных коэффициентов
  - Применение метода неопределенных коэффициентов к извлечению квадратного корня из комплексного числа

Вычислить

$$\sqrt{\frac{2}{9}i}$$

Ответ (типа 'complex_set'): `(1/3,1/3),(-1/3,-1/3)`

Задача Complex2-55

- Извлечение квадратного корня из комплексного числа при помощи метода неопределенных коэффициентов
  - Применение метода неопределенных коэффициентов к извлечению квадратного корня из комплексного числа

Вычислить

$$\sqrt{-\frac{3}{4}-i}$$

Ответ (типа 'complex_set'): `(1/2,-1),(-1/2,1)`

Задача Complex2-56

- Метод решения квадратного уравнения в поле комплексных чисел
  - Решение квадратного уравнения в поле действительных чисел
  - Арифметические операции с комплексными числами
  - Извлечение квадратного корня из комплексного числа при помощи метода неопределенных коэффициентов

Формулы для корней квадратного уравнения с комплексными и действительными коэффициентами одинаковы. Поэтому, если необходимо решить уравнение

$$az^2 + bz + c = 0, \quad \text{где} \quad a, b, c \in \mathbb{C},$$

то решение будет иметь вид $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$-дискриминант нашего квадратного уравнения.
Здесь, вообще говоря, возникает необходимость решения вспомогательной задачи извлечения квадратного корня из комплексного числа (из дискриминанта). Ее можно решить при помощи метода неопределенных коэффициентов. Как вы могли заметить, корень из комплексного числа имеет два значения. Ими являются противоположные друг другу числа. Знак $\pm$ в формуле для корней квадратного уравнения можно понимать двумя равносильными способами: либо к числу -b следует прибавлять каждое из значений $\sqrt{D}$, либо к числу -b следует прибавлять и отнимать от него одно из значений $\sqrt{D}$.

Пример: Решить уравнение $z^2 + (-2 + 4i)z - 3 - 6i = 0$
Найдем дискриминант этого уравнения: $D = (-2 + 4i)^2 + 4(3 + 6i) = 8i$
Тогда

$$\sqrt{D} = \pm(2 + 2i)$$

Значит, решение уравнения имеет вид:

$$z_1 = \frac{2 - 4i + 2 + 2i}{2} = 2 - i$$

$$z_2 = \frac{2 - 4i - 2 - 2i}{2} = -3i$$

Ответ (типа '`void`'): не требуется

Задача Complex2-57

- Решение квадратного уравнения в поле комплексных чисел
  - Метод решения квадратного уравнения в поле комплексных чисел

Решить квадратное уравнение

$$z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$$

Ответ (типа '`complex_set`'): `(1,1),(0,1)`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex2-58

- Решение квадратного уравнения в поле комплексных чисел
  - Метод решения квадратного уравнения в поле комплексных чисел

Решить квадратное уравнение

$$z^2 - 3z + 3 - i = 0$$

Ответ (типа 'complex_set'): `(2,1),(1,-1)`

Источник задачи: Курош А.Г.

Задача Complex2-59

- Решение квадратного уравнения в поле комплексных чисел
  - Метод решения квадратного уравнения в поле комплексных чисел

Решить квадратное уравнение

$$z^2 - (2 + i)z + (-1 + 7i) = 0$$

Ответ (типа 'complex_set'): `(3,-1),(-1,2)`

Источник задачи: Фаддеев Д.К., Соминский И.С.

Задача Complex2-60

- Решение квадратного уравнения в поле комплексных чисел
  - Метод решения квадратного уравнения в поле комплексных чисел

Решить квадратное уравнение

$$z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$$

Ответ (типа 'complex_set'): `(2,1),(1,-3)`

Источник задачи: Фаддеев Д.К., Соминский И.С.

Задача Complex2-61

- Решение квадратного уравнения в поле комплексных чисел
  - Метод решения квадратного уравнения в поле комплексных чисел

Решить квадратное уравнение

$$(2 + i)z^2 - (5 - i)z + (2 - 2i) = 0$$

Ответ (типа 'complex_set'): `(1,-1),(4/5,-2/5)`

Источник задачи: Фаддеев Д.К., Соминский И.С.

3 Геометрическая интерпретация комплексного числа

Тема урока. Комплексное число как точка и вектор на плоскости, геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа, геометрический смысл сопряженного к комплексному числу, геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел, геометрический смысл абсолютной величины комплексного числа и разности двух комплексных чисел. Аналитическое описание множества на плоскости при помощи комплексных чисел. Исследование на разрешимость системы уравнений геометрическим способом.

Список умений «Предполагаемые»

1. Понятие прямоугольной декартовой системы координат
   используется в задачах: 0
2. Понятие геометрического вектора
   используется в задачах: 6
3. Вычисление координат вектора
   используется в задачах: 7, 8, 9, 10, 11
4. Сложение векторов
   используется в задачах: 22
5. Вычисление расстояния между точками плоскости
   используется в задачах: 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41
6. Понятие мнимой единицы и алгебраической формы комплексного числа
   используется в задачах: 0
7. Понятие действительной и мнимой частей комплексного числа
   используется в задачах: 12
8. Понятие сопряженного к комплексному числу
   используется в задачах: 18
9. Понятие модуля комплексного числа
   используется в задачах: 33
10. Арифметические операции с комплексными числами
    используется в задачах: 22, 33

Список умений «Основные»

1. Интерпретация комплексного числа как точки на плоскости
   развивается в задачах: 0
   используется в задачах: 1, 2, 3, 4, 5
2. Действительная и мнимая оси
   развивается в задачах: 0

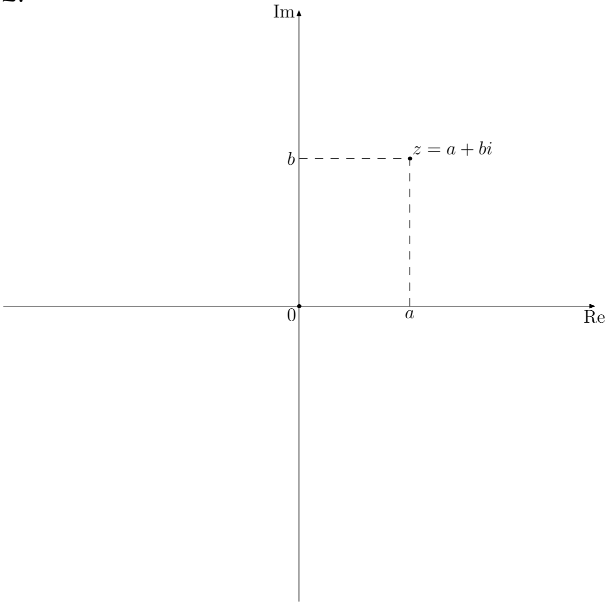
3. Понятие комплексной плоскости
   развивается в задачах: 0
   используется в задачах: 6
4. Отыскание комплексного числа, соответствующего точке на плоскости
   развивается в задачах: 1, 2, 3, 4, 5
5. Интерпретация комплексного числа как вектора в комплексной плоскости
6. Геометрический смысл комплексного числа
   развивается в задачах: 6
   используется в задачах: 12, 18, 22, 33
7. Отыскание комплексного числа, соответствующего вектору на плоскости
   развивается в задачах: 7, 8, 9, 10, 11
8. Геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа
   развивается в задачах: 12
   используется в задачах: 13, 14, 15, 16, 17, 42
9. Аналитическое описание множества на комплексной плоскости с использованием геометрического смысла действительной и мнимой частей комплексного числа
10. Геометрическая смысл сопряженного к комплексному числу
    развивается в задачах: 18
    используется в задачах: 19, 20, 21
11. Отыскание сопряженного к комплексному числу геометрическим способом
    развивается в задачах: 19, 20, 21
12. Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел
    развивается в задачах: 22
    используется в задачах: 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
13. Сложение комплексных чисел геометрическим способом
    развивается в задачах: 23, 24, 25, 26, 27
14. Вычитание комплексных чисел геометрическим способом
    развивается в задачах: 28, 29, 30, 31, 32
15. Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел
    развивается в задачах: 33
    используется в задачах: 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47
16. Геометрический смысл абсолютной величины комплексного числа
    развивается в задачах: 33
    используется в задачах: 34, 35, 36, 42
17. Вычисление абсолютной величины комплексного числа геометрическим способом
18. Вычисление абсолютной величины разности двух комплексных чисел
    развивается в задачах: 37, 38, 39, 40, 41

19. Аналитическое описание множества на комплексной плоскости
развивается в задачах: 42
20. Отыскание числа решений системы уравнений геометрическим способом
развивается в задачах: 43, 44, 45, 46, 47

Задача Complex3-0

- Интерпретация комплексного числа как точки на плоскости
- Действительная и мнимая оси
- Понятие комплексной плоскости
- ○ Понятие прямоугольной декартовой системы координат
- ○ Понятие мнимой единицы и алгебраической формы комплексного числа

Комплексное число $z = x + yi$ можно изобразить точкой (x, y) на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат. Эта точка обозначается той же буквой z.



Соответствие между комплексными числами и точками плоскости является взаимно однозначным, то есть каждому комплексному числу соответствует, и притом единственная, точка плоскости.

Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые - точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называется *действительной осью* ось ординат - *мнимой осью* а плоскость, на которой отображаются комплексные числа - *комплексной плоскостью* Начало координат, которому соответствует число 0, называют нулевой точкой.

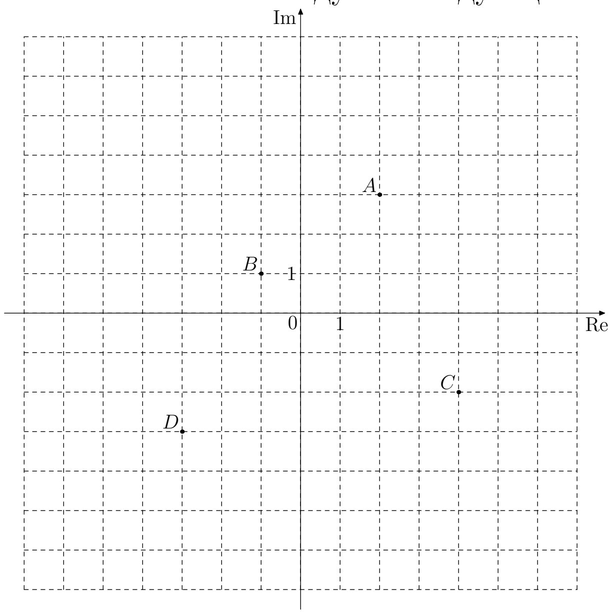
Ответ (типа 'void'): не требуется

Источник задачи: Дыбин В.Б., Привалов И.И.

Задача Complex3-1

- Отыскание комплексного числа, соответствующего точке на плоскости
- ○ Интерпретация комплексного числа как точки на плоскости

На приведенном ниже рисунке изображены точки в комплексной плоскости. Запишите соответствующие им комплексные числа.
Записывать ответ следует в следующем порядке: A, B, C, D

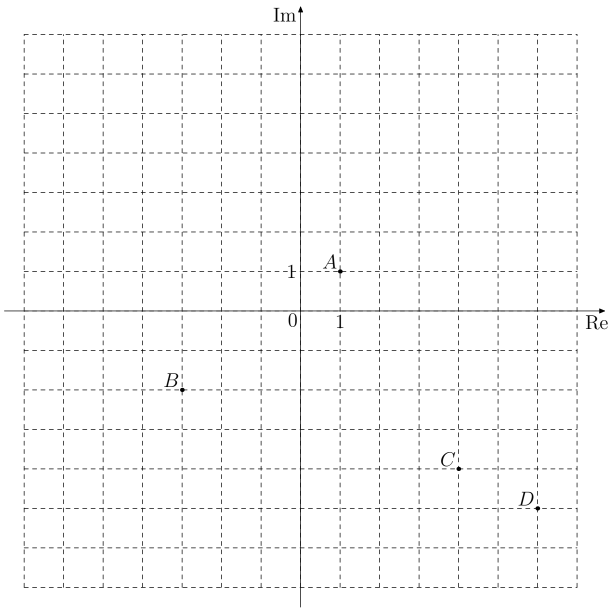


Ответ (типа 'complex_list'): `(2,3),(-1,1),(4,-2),(-3,-3)`

Задача Complex3-2

- Отыскание комплексного числа, соответствующего точке на плоскости
- ○ Интерпретация комплексного числа как точки на плоскости

На приведенном ниже рисунке изображены точки в комплексной плоскости. Запишите соответствующие им комплексные числа.
Записывать ответ следует в следующем порядке: A, B, C, D

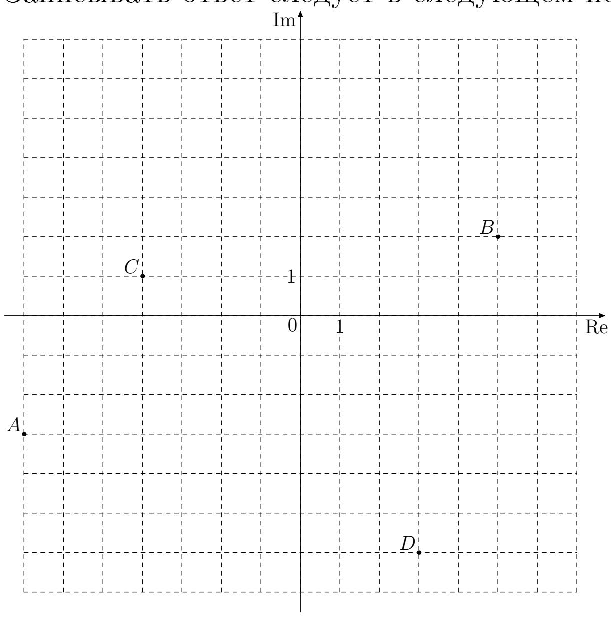


Ответ (типа 'complex_list'): (1,1),(-3,-2),(4,-4),(6,-5)

Задача Complex3-3

- Отыскание комплексного числа, соответствующего точке на плоскости
- ○ Интерпретация комплексного числа как точки на плоскости

На приведенном ниже рисунке изображены точки в комплексной плоскости. Запишите соответствующие им комплексные числа.
Записывать ответ следует в следующем порядке: A, B, C, D



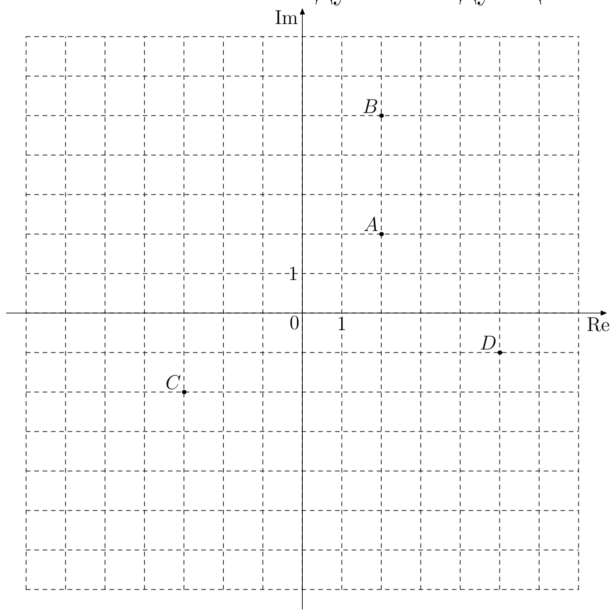
Ответ (типа 'complex_list'): (-7,-3),(5,2),(-4,1),(3,-6)

Задача Complex3-4

- Отыскание комплексного числа, соответствующего точке на плоскости

◦ Интерпретация комплексного числа как точки на плоскости

На приведенном ниже рисунке изображены точки в комплексной плоскости. Запишите соответствующие им комплексные числа.
Записывать ответ следует в следующем порядке: $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}$

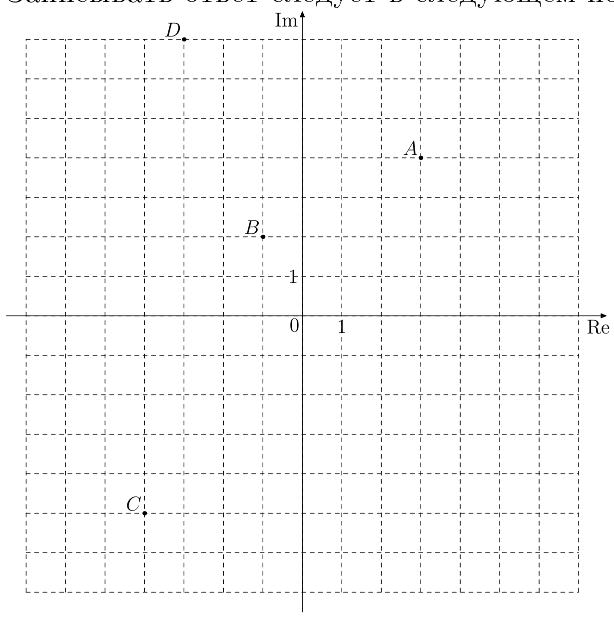


Ответ (типа 'complex_list'): `(2,2),(2,5),(-3,-2),(5,-1)`

Задача Complex3-5

- Отыскание комплексного числа, соответствующего точке на плоскости
- ◦ Интерпретация комплексного числа как точки на плоскости

На приведенном ниже рисунке изображены точки в комплексной плоскости. Запишите соответствующие им комплексные числа.
Записывать ответ следует в следующем порядке: $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}$

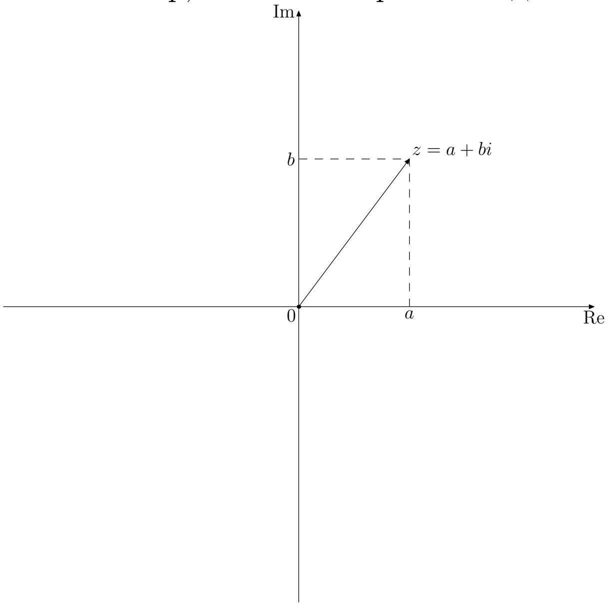


Ответ (типа 'complex_list'): (3,4),(-1,2),(-4,-5),(-3,7)

Задача Complex3-6

- Интерпретация комплексного числа как вектора на плоскости
- Геометрический смысл комплексного числа
- ○ Понятие геометрического вектора
- ○ Понятие комплексной плоскости

Любое комплексное число $z = x + yi$ можно также изобразить вектором в комплексной плоскости с координатами $\{x, y\}$. В качестве такого вектора можно, например, взять вектор, начало которого находится в нулевой точке, а конец в точке z:



.

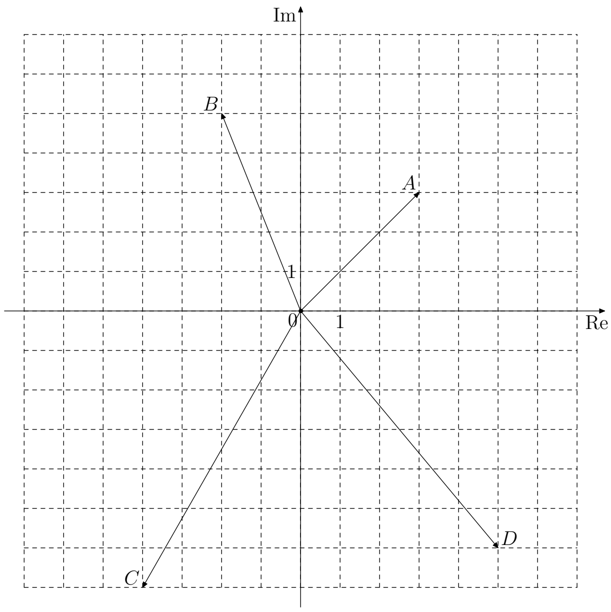
Ответ (типа 'void'): не требуется

Источник задачи: Дыбин В.Б., Привалов И.И.

Задача Complex3-7

- Отыскание комплексного числа, соответствующего вектору на плоскости
- ○ Вычисление координат вектора
- ○ Интерпретация комплексного числа как вектора на плоскости

На приведенном ниже рисунке изображены вектора в комплексной плоскости. Запишите соответствующие им комплексные числа.
Записывать ответ следует в следующем порядке: $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$

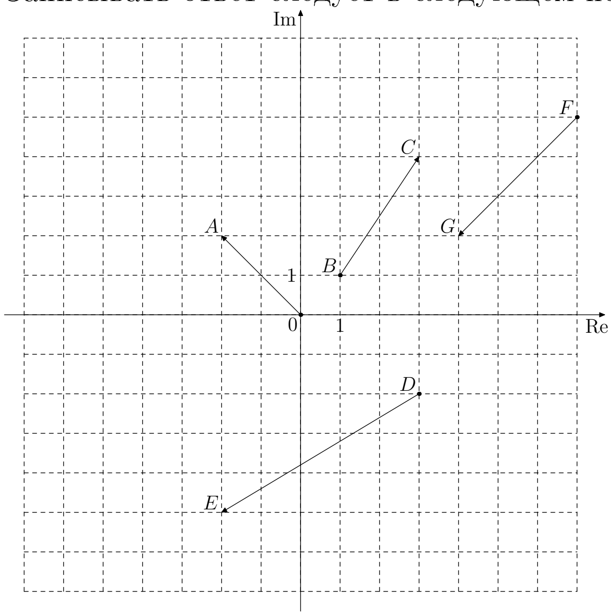


Ответ (типа 'complex_list'): (3,3),(-2,5),(-4,-7),(5,-6)

Задача Complex3-8

- Отыскание комплексного числа, соответствующего вектору на плоскости
- ○ Вычисление координат вектора
- ○ Интерпретация комплексного числа как вектора на плоскости

На приведенном ниже рисунке изображены вектора в комплексной плоскости. Запишите соответствующие им комплексные числа.
Записывать ответ следует в следующем порядке: $\overline{OA}, \overline{BC}, \overline{DE}, \overline{FG}$

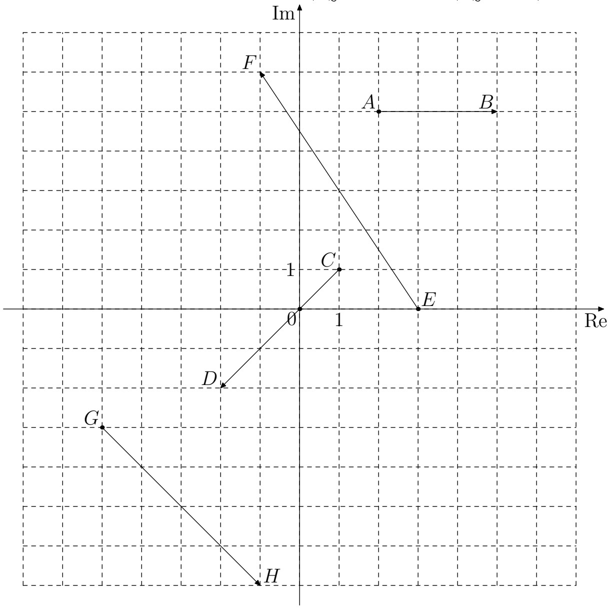


Ответ (типа 'complex_list'): (-2,2),(2,3),(-5,-3),(-3,-3)

Задача Complex3-9

- Отыскание комплексного числа, соответствующего вектору на плоскости
  - Вычисление координат вектора
  - Интерпретация комплексного числа как вектора на плоскости

На приведенном ниже рисунке изображены вектора в комплексной плоскости. Запишите соответствующие им комплексные числа.
Записывать ответ следует в следующем порядке: $\overline{\mathsf{AB}}, \overline{\mathsf{CD}}, \overline{\mathsf{EF}}, \overline{\mathsf{GH}}$

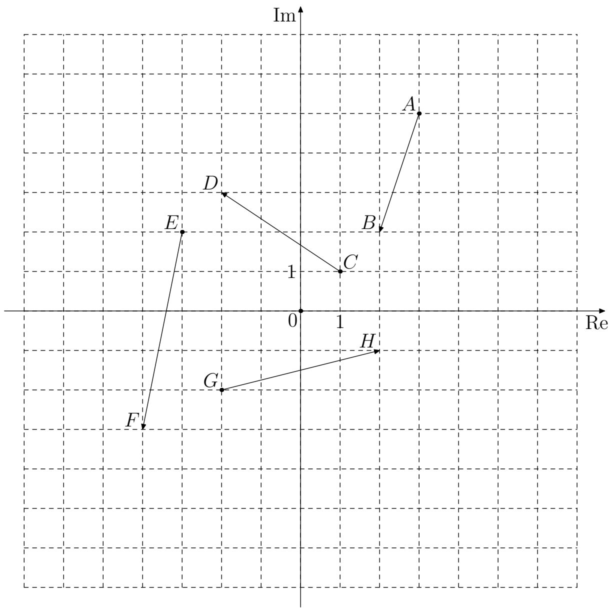


Ответ (типа 'complex_list'): `(3,0),(-3,-3),(-4,6),(4,-4)`

Задача Complex3-10

- Отыскание комплексного числа, соответствующего вектору на плоскости
  - Вычисление координат вектора
  - Интерпретация комплексного числа как вектора на плоскости

На приведенном ниже рисунке изображены вектора в комплексной плоскости. Запишите соответствующие им комплексные числа.
Записывать ответ следует в следующем порядке: $\overline{\mathsf{AB}}, \overline{\mathsf{CD}}, \overline{\mathsf{EF}}, \overline{\mathsf{GH}}$

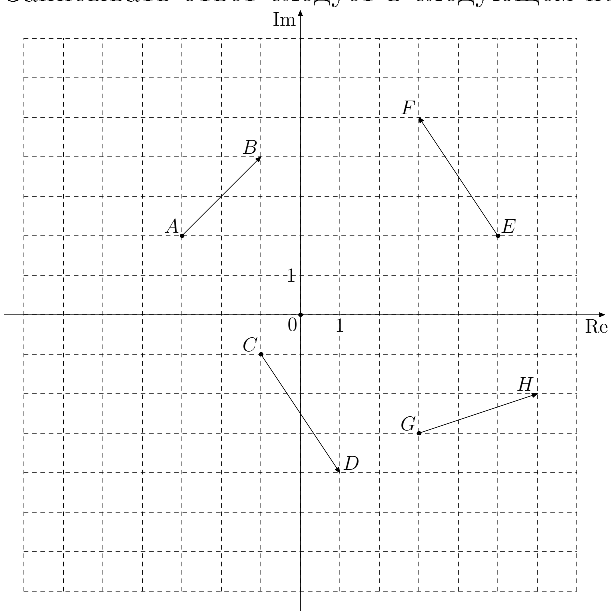


Ответ (типа 'complex_list'): `(-1,-3),(-3,2),(-1,-5),(4,1)`

Задача Complex3-11

- Отыскание комплексного числа, соответствующего вектору на плоскости
- ○ Вычисление координат вектора
- ○ Интерпретация комплексного числа как вектора на плоскости

На приведенном ниже рисунке изображены вектора в комплексной плоскости. Запишите соответствующие им комплексные числа.
Записывать ответ следует в следующем порядке: $\overline{\mathsf{AB}}, \overline{\mathsf{CD}}, \overline{\mathsf{EF}}, \overline{\mathsf{GH}}$



Ответ (типа 'complex_list'): `(2,2),(2,-3),(-2,3),(3,1)`

Задача Complex3-12

- Геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа
  - Понятие действительной и мнимой частей комплексного числа
  - Геометрический смысл комплексного числа

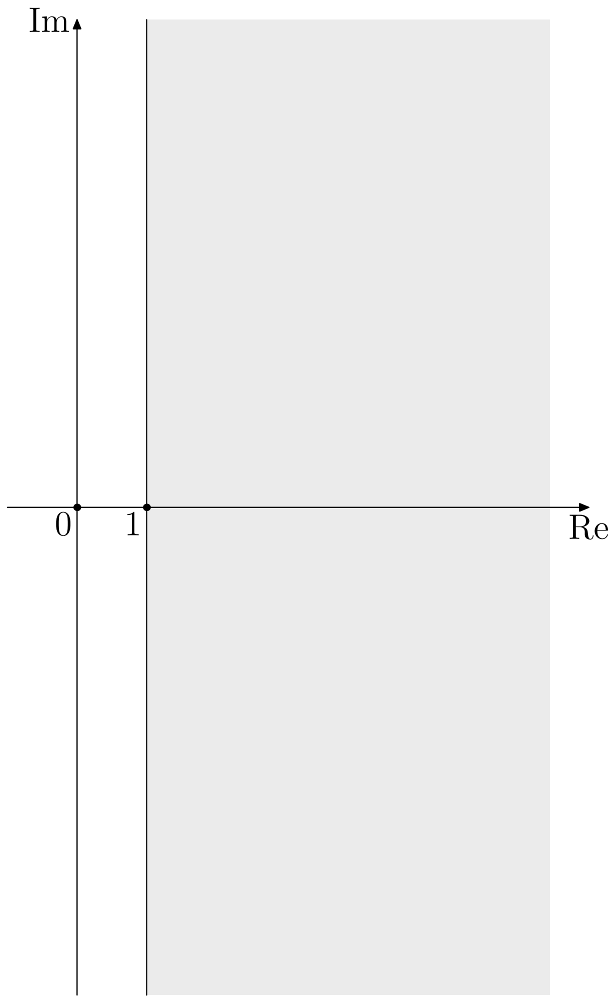
Действительная часть комплексного числа $z = x + yi$ равна абсциссе соответствующей точки (x, y)(абсциссе вектора $\{x, y\}$), а мнимая часть - ординате этой точки (вектора). То есть $\operatorname{Re} z = x, \ \operatorname{Im} z = y$.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex3-13

- Аналитическое описание множества на комплексной плоскости с использованием геометрического смысла действительной и мнимой частей комплексного числа
  - Геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа

На приведенном ниже рисунке изображено множество точек комплексной плоскости. Опишите его, используя геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа (т.е. запишите выражения, описывающие это множество)

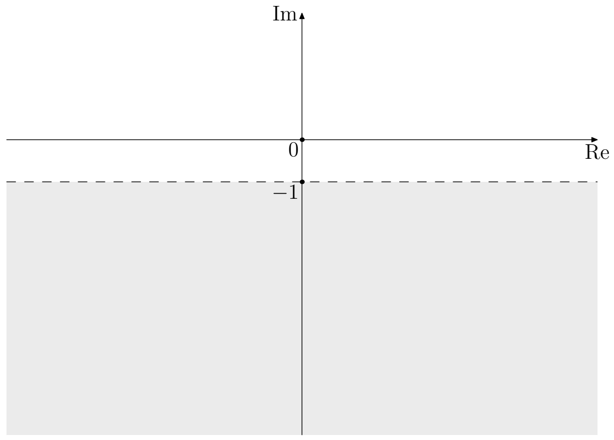


Ответ (типа '`string_set`'): `Re z >= 1`

Задача Complex3-14

- Аналитическое описание множества на комплексной плоскости с использованием геометрического смысла действительной и мнимой частей комплексного числа
  - Геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа

На приведенном ниже рисунке изображено множество точек комплексной плоскости. Опишите его, используя геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа (т.е. запишите выражения, описывающие это множество)

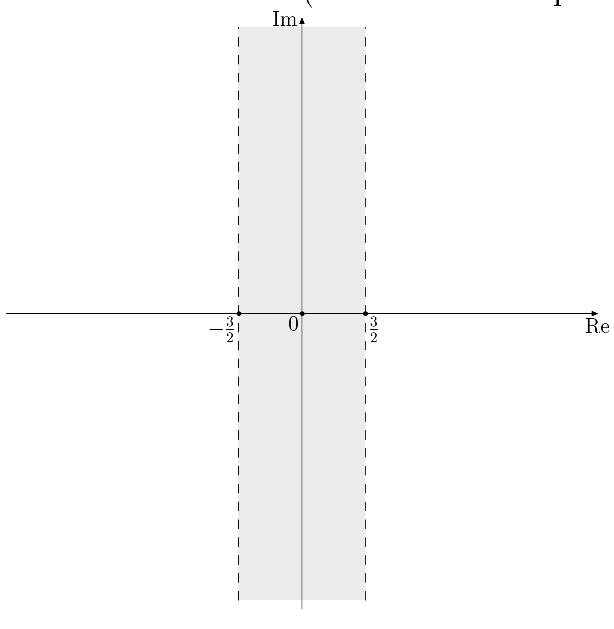


Ответ (типа 'string_set'): `Im(z)<-1`

Задача Complex3-15

- Аналитическое описание множества на комплексной плоскости с использованием геометрического смысла действительной и мнимой частей комплексного числа
  - Геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа

На приведенном ниже рисунке изображено множество точек комплексной плоскости. Опишите его, используя геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа (т.е. запишите выражения, описывающие это множество)



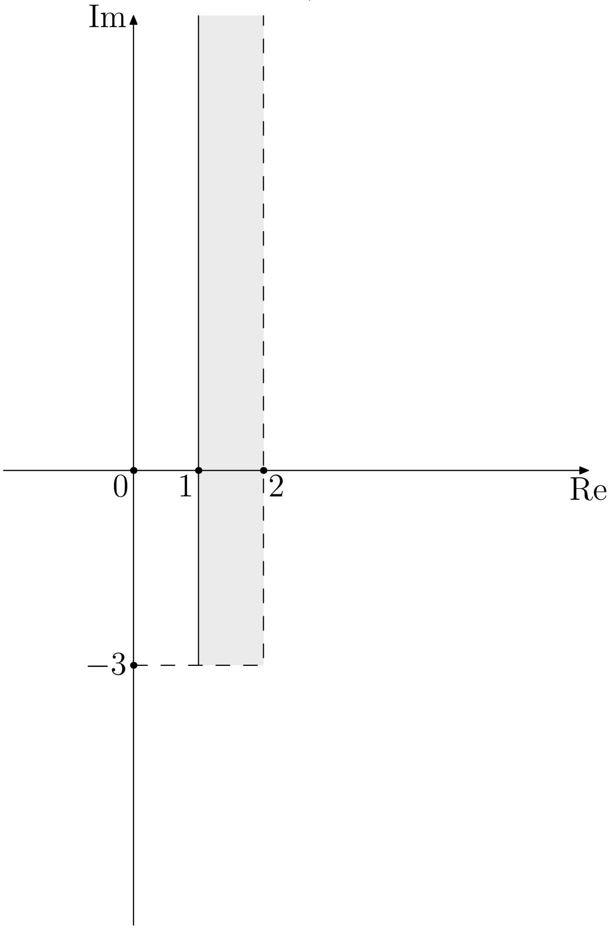
Ответ (типа 'string_set'): `Re(z)<3/2, Re(z)>-3/2`

Задача Complex3-16

- Аналитическое описание множества на комплексной плоскости с использованием геометрического смысла действительной и мнимой частей комплексного числа

- ○ Геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа

На приведенном ниже рисунке изображено множество точек комплексной плоскости. Опишите его, используя геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа (т.е. запишите выражения, описывающие это множество)

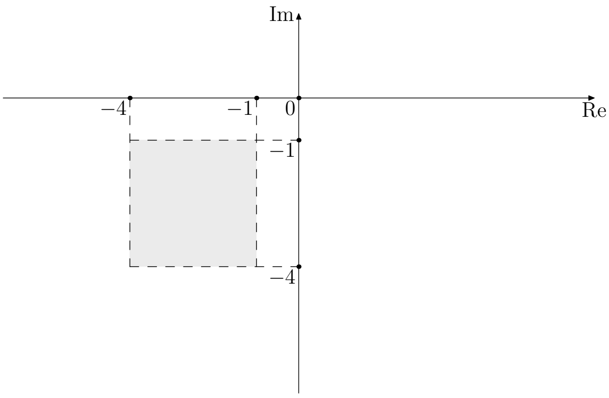


Ответ (типа 'string_set'): `Re(z)>=1, Re(z)<2, Im(z)>-3`

Задача Complex3-17

- Аналитическое описание множества на комплексной плоскости с использованием геометрического смысла действительной и мнимой частей комплексного числа
  - ○ Геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа

На приведенном ниже рисунке изображено множество точек комплексной плоскости. Опишите его, используя геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа (т.е. запишите выражения, описывающие это множество)

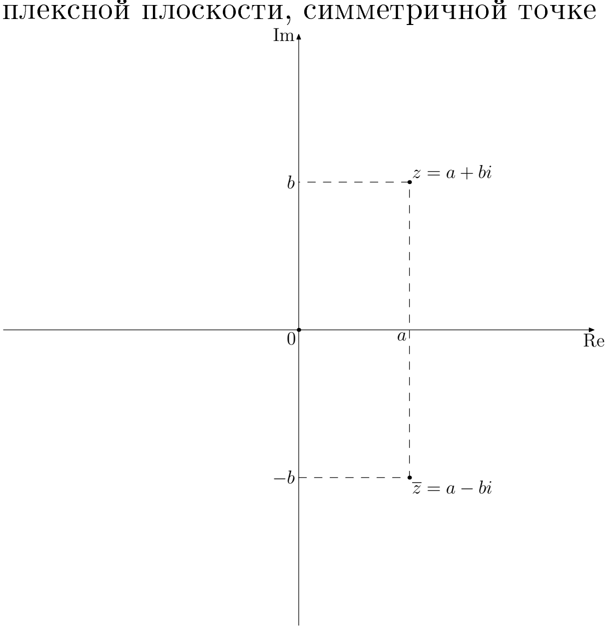


Ответ (типа 'string_set'): `Re(z)>-4, Re(z)<-1, Im(z)>-4, Im z<-1`

Задача Complex3-18

- Геометрическая смысл сопряженного к комплексному числу
- ○ Понятие сопряженного к комплексному числу
- ○ Геометрический смысл комплексного числа

Число, сопряженное комплексному числу $z = x + yi$ можно изобразить точкой комплексной плоскости, симметричной точке z относительно действительной оси.



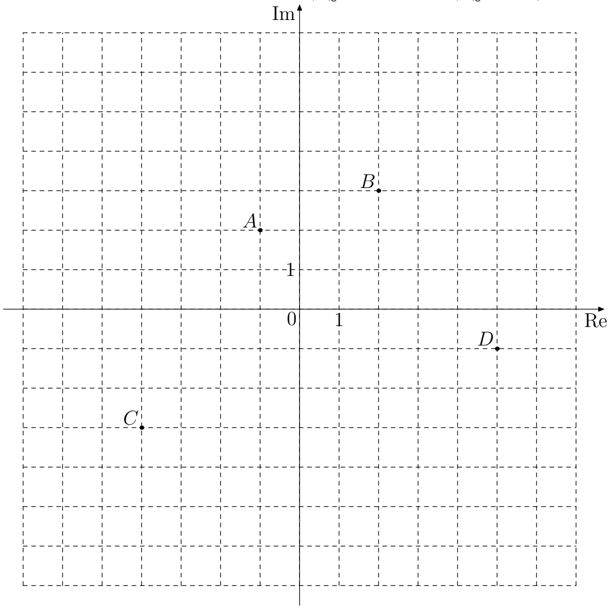
Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex3-19

- Отыскание сопряженного к комплексному числу геометрическим способом
- ○ Геометрическая смысл сопряженного к комплексному числу

На приведенном ниже рисунке изображены точки в комплексной плоскости. Они изображают комплексные числа. Геометрическим способом найдите сопряженные к этим числам.

Записывать ответ следует в следующем порядке: A, B, C, D



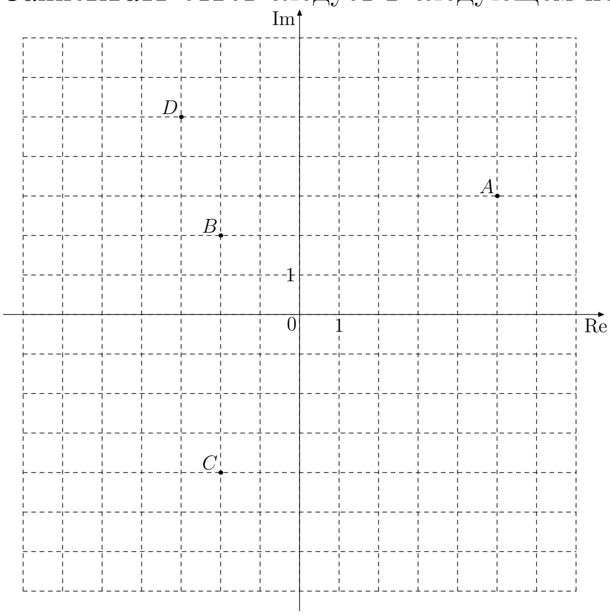
Ответ (типа 'complex_list'): `(-1,-2),(2,-3),(-4,3),(5,1)`

Задача Complex3-20

- Отыскание сопряженного к комплексному числу геометрическим способом
  - Геометрическая смысл сопряженного к комплексному числу

На приведенном ниже рисунке изображены точки в комплексной плоскости. Они изображают комплексные числа. Геометрическим способом найдите сопряженные к этим числам.

Записывать ответ следует в следующем порядке: A, B, C, D



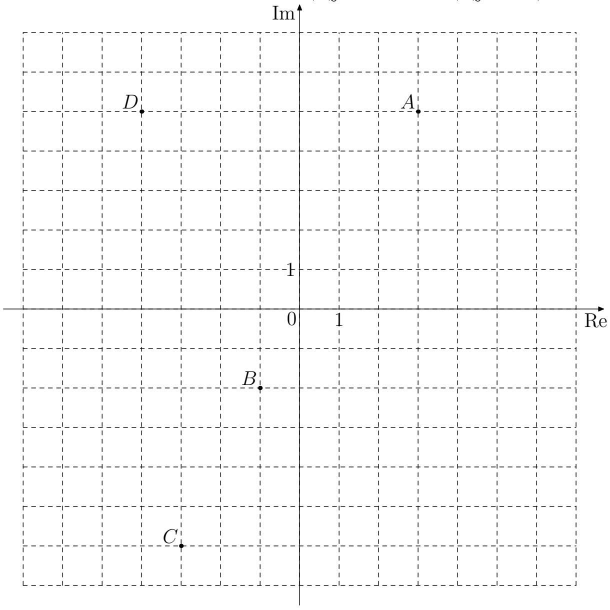
Ответ (типа 'complex_list'): `(5,-3),(-2,-2),(-2,4),(-3,-5)`

Задача Complex3-21

- Отыскание сопряженного к комплексному числу геометрическим способом
  - Геометрическая смысл сопряженного к комплексному числу

На приведенном ниже рисунке изображены точки в комплексной плоскости. Они изображают комплексные числа. Геометрическим способом найдите сопряженные к этим числам.

Записывать ответ следует в следующем порядке: A, B, C, D



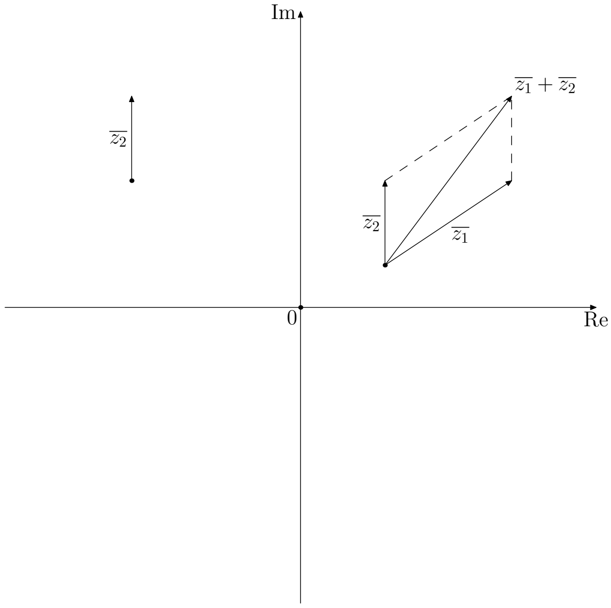
Ответ (типа 'complex_list'): `(3,-5),(-1,2),(-3,6),(-4,-5)`

Задача Complex3-22

- Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел
  - Сложение векторов
  - Арифметические операции с комплексными числами
  - Геометрический смысл комплексного числа

Представим комплексные числа z_1 и z_2 в виде соответствующих векторов в комплексной плоскости. Тогда комплексное число $z_1 + z_2$ можно, согласно определению сложения векторов, изобразить вектором, компоненты которого равны суммам соответствующих компонент векторов z_1 и z_2. То есть число $z_1 + z_2$ представится суммой векторов z_1 и z_2.

Напомним, что складывать вектора можно, например, по правилу параллелограмма. Для этого необходимо сперава параллельным переносом совместить начала векторов, а затем построить параллелограмм на этих векторах как на сторонах. Вектор суммы будет являться диагональю нашего параллелограмма.



Известно, что $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Поэтому, сложив вектора z_1 и $-z_2$, получим вектор, изображающий число $z_1 - z_2$.

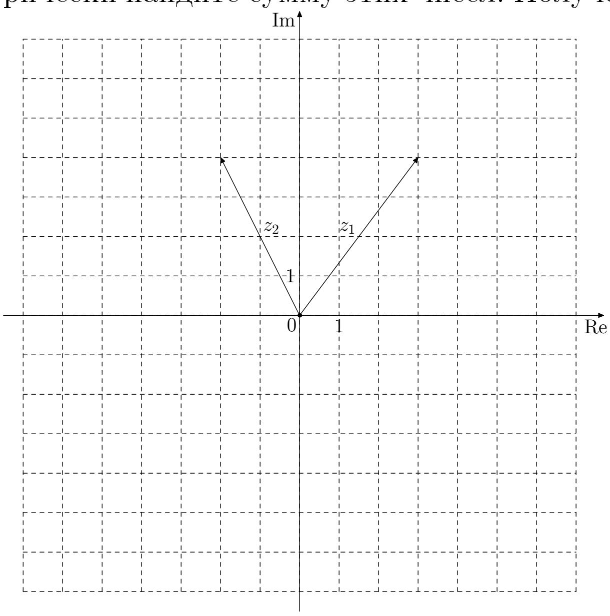
Ответ (типа '`void`'): не требуется

Источник задачи: Привалов И.И.

Задача Complex3-23

- Сложение комплексных чисел геометрическим способом
  - Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке векторами изображены комплексные числа. Геометрически найдите сумму этих чисел. Полученное комплексное число запишите в ответ

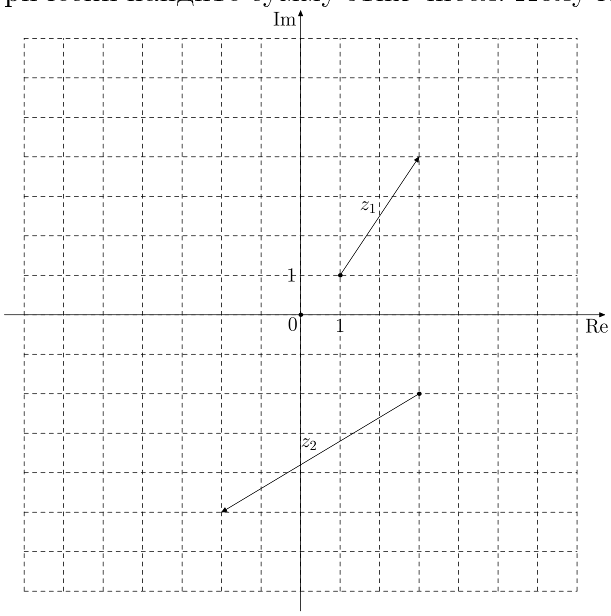


Ответ (типа '`complex`'): `(1,8)`

Задача Complex3-24

- Сложение комплексных чисел геометрическим способом
  - Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке векторами изображены комплексные числа. Геометрически найдите сумму этих чисел. Полученное комплексное число запишите в ответ

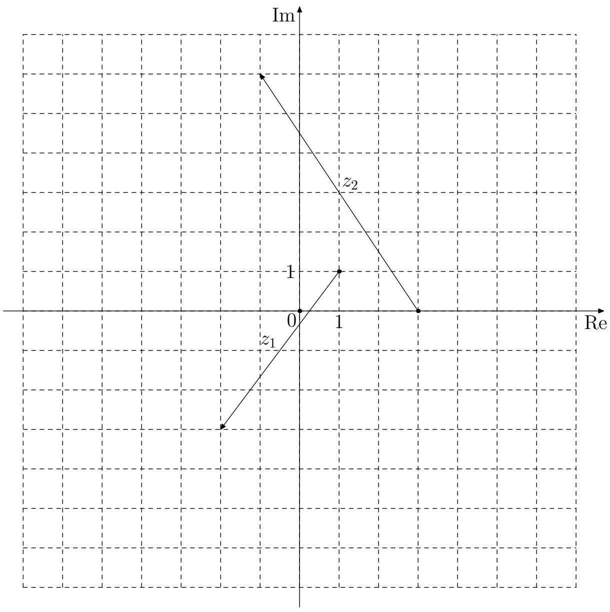


Ответ (типа 'complex'): `(-3,0)`

Задача Complex3-25

- Сложение комплексных чисел геометрическим способом
  - Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке векторами изображены комплексные числа. Геометрически найдите сумму этих чисел. Полученное комплексное число запишите в ответ

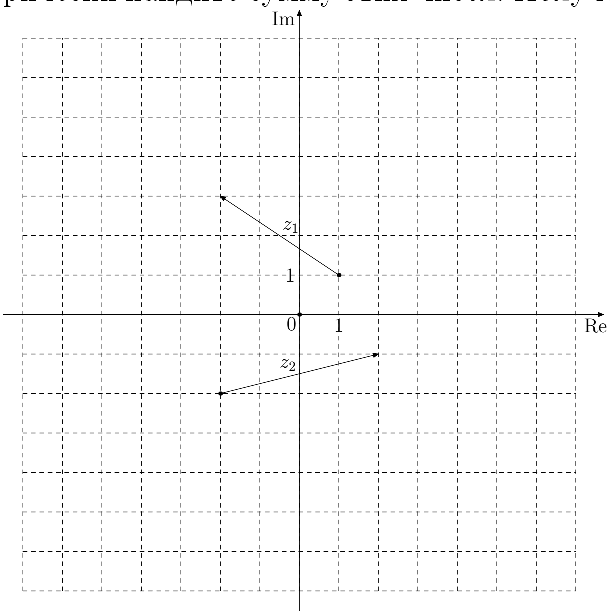


Ответ (типа 'complex'): `(-7,2)`

Задача Complex3-26

- Сложение комплексных чисел геометрическим способом
  - Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке векторами изображены комплексные числа. Геометрически найдите сумму этих чисел. Полученное комплексное число запишите в ответ



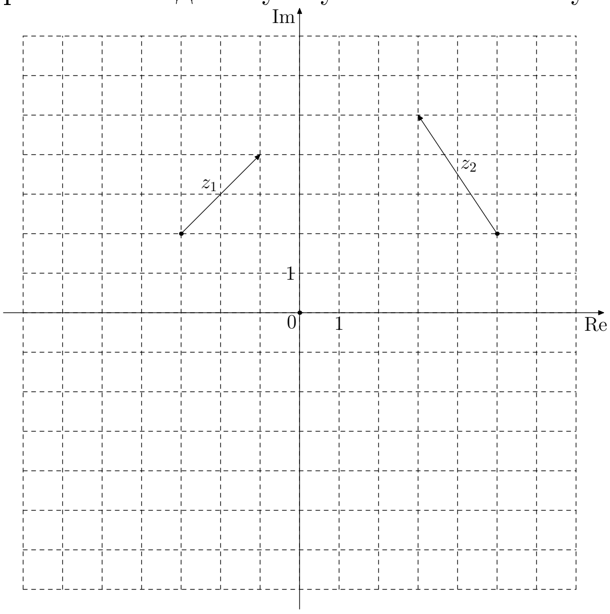
Ответ (типа 'complex'): `(1,3)`

Задача Complex3-27

- Сложение комплексных чисел геометрическим способом

○ Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке векторами изображены комплексные числа. Геометрически найдите сумму этих чисел. Полученное комплексное число запишите в ответ

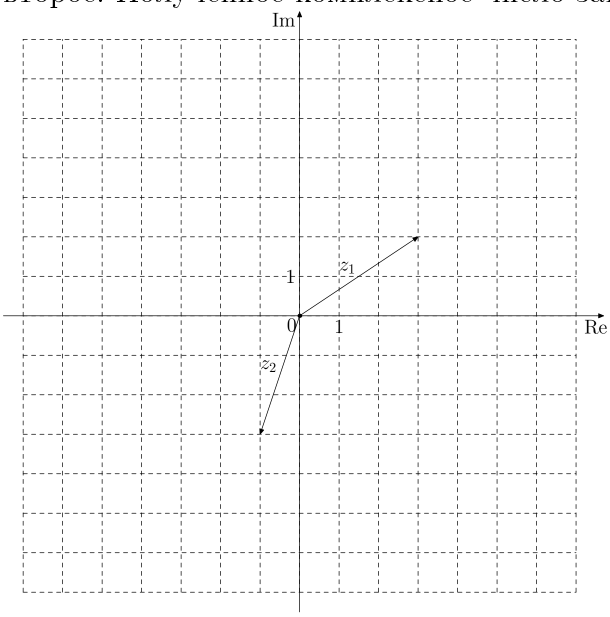


Ответ (типа '`complex`'): `(0,5)`

Задача Complex3-28

- Вычитание комплексных чисел геометрическим способом
- ○ Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке векторами изображены комплексные числа. Геометрически найдите разность этих чисел. От первого комплексного числа следует отнять второе. Полученное комплексное число запишите в ответ

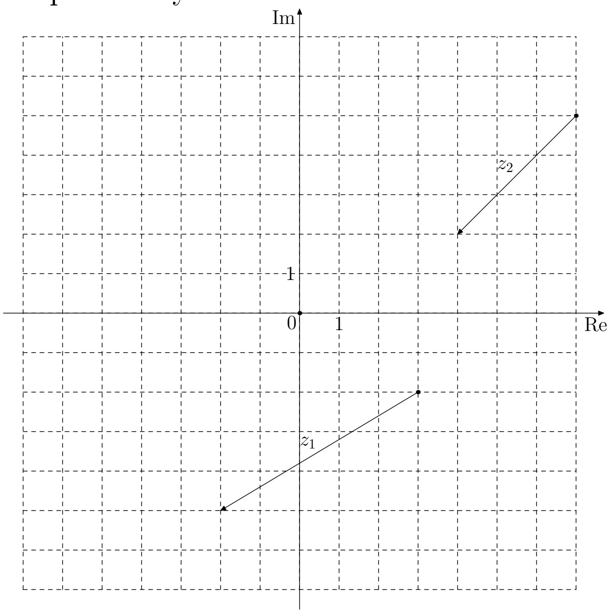


Ответ (типа '`complex`'): `(4,5)`

Задача Complex3-29

- Вычитание комплексных чисел геометрическим способом
  - Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке векторами изображены комплексные числа. Геометрически найдите разность этих чисел. От первого комплексного числа следует отнять второе. Полученное комплексное число запишите в ответ

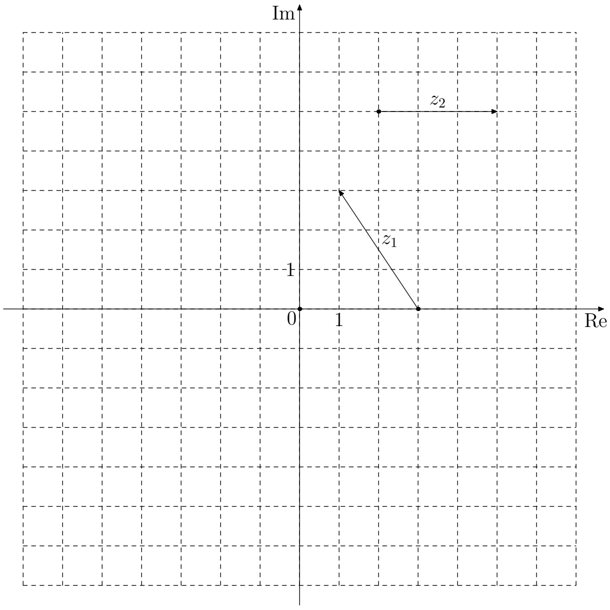


Ответ (типа 'complex'): `(-2,0)`

Задача Complex3-30

- Вычитание комплексных чисел геометрическим способом
  - Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке векторами изображены комплексные числа. Геометрически найдите разность этих чисел. От первого комплексного числа следует отнять второе. Полученное комплексное число запишите в ответ

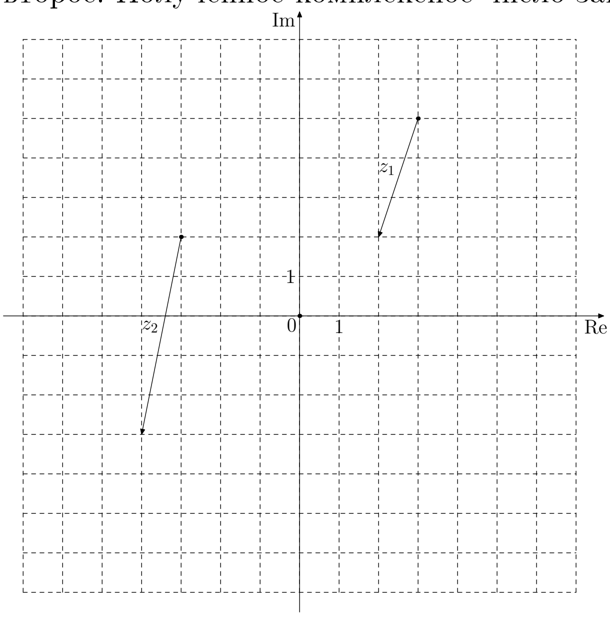


Ответ (типа 'complex'): `(-5,3)`

Задача Complex3-31

- Вычитание комплексных чисел геометрическим способом
- ○ Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке векторами изображены комплексные числа. Геометрически найдите разность этих чисел. От первого комплексного числа следует отнять второе. Полученное комплексное число запишите в ответ



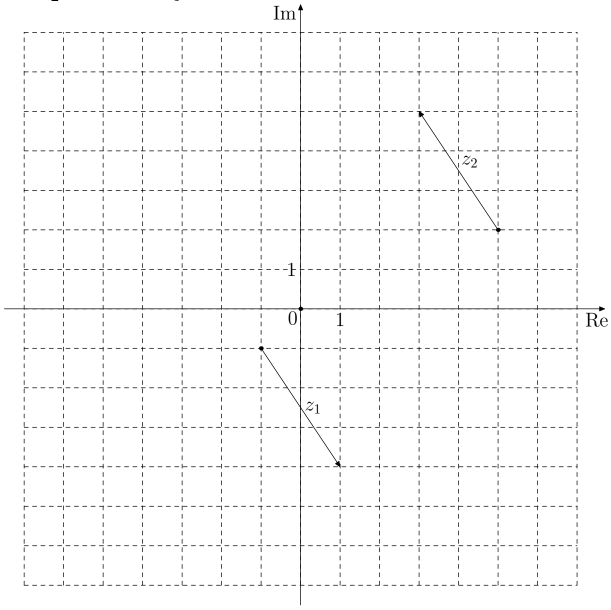
Ответ (типа 'complex'): `(0,2)`

Задача Complex3-32

- Вычитание комплексных чисел геометрическим способом

○ Геометрическая интерпретация суммы и разности комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке векторами изображены комплексные числа. Геометрически найдите разность этих чисел. От первого комплексного числа следует отнять второе. Полученное комплексное число запишите в ответ



Ответ (типа 'complex'): `(4,-6)`

Задача Complex3-33

- Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел
- Геометрический смысл абсолютной величины комплексного числа
- ○ Геометрический смысл комплексного числа
- ○ Понятие модуля комплексного числа
- ○ Арифметические операции с комплексными числами

Рассмотрим два комплексных числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$. Мы уже знаем, что комплексное число $z_1 - z_2$ представимо в виде вектора $z_1 - z_2 = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2\}$. Кроме того известно, что $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Мы видим, что в правой части равенства стоит длина вектора $z_1 - z_2$. Значит, абсолютная величина разности комплексных чисел z_1 и z_2 равна длине вектора $z_1 - z_2$, то есть вектора, соединяющего точки z_1 и z_2.

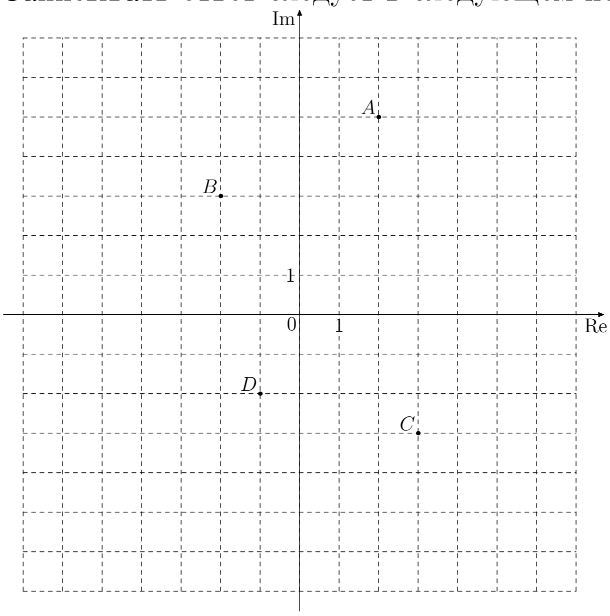
Таким образом, модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между соответствующими им точками комплексной плоскости. В частности, если положить одно из комплексных чисел равным нулю, то мы получим, что абсолютная величина комплексного числа равна расстоянию от соответствующей ей точки комплексной плоскости до нуля.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex3-34

- Вычисление абсолютной величины комплексного числа геометрическим способом
- ○ Вычисление расстояния между точками плоскости
- ○ Геометрический смысл абсолютной величины комплексного числа

На приведенном ниже рисунке точками изображены комплексные числа. Геометрически найдите абсолютные величины этих чисел
Записывать ответ следует в следующем порядке: A, B, C, D

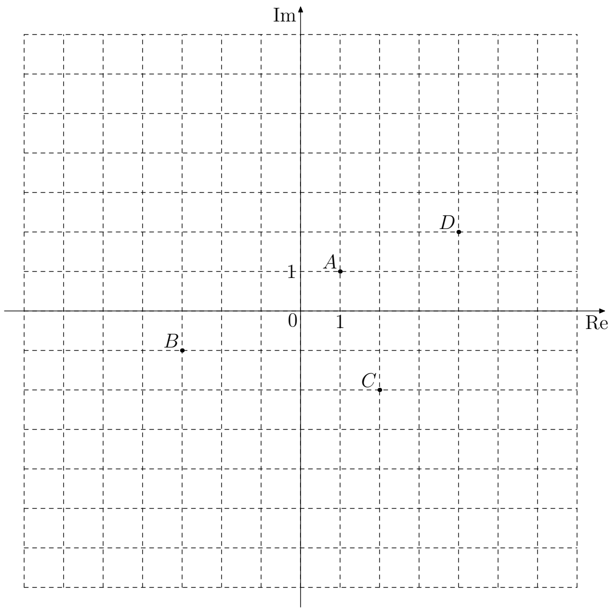


Ответ (типа 'real_list'): `5,sqrt(10),sqrt(13),sqrt(2)`

Задача Complex3-35

- Вычисление абсолютной величины комплексного числа геометрическим способом
- ○ Вычисление расстояния между точками плоскости
- ○ Геометрический смысл абсолютной величины комплексного числа

На приведенном ниже рисунке точками изображены комплексные числа. Геометрически найдите абсолютные величины этих чисел
Записывать ответ следует в следующем порядке: A, B, C, D

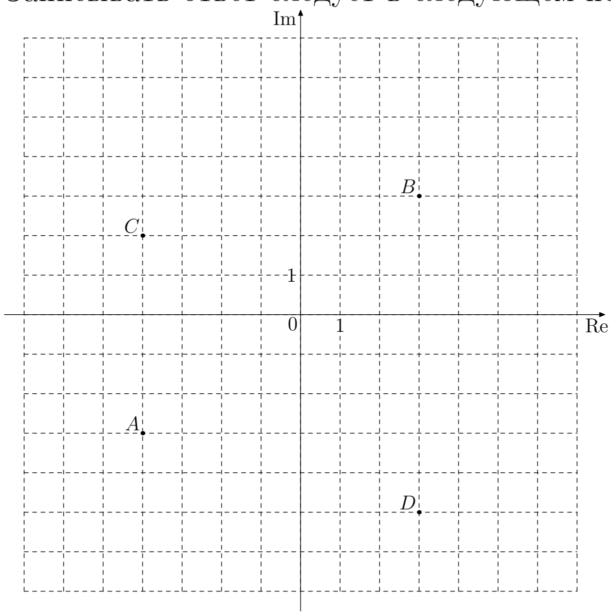


Ответ (типа 'real_list'): `sqrt(2),sqrt(10),sqrt(8),sqrt(20)`

Задача Complex3-36

- Вычисление абсолютной величины комплексного числа геометрическим способом
  - Вычисление расстояния между точками плоскости
  - Геометрический смысл абсолютной величины комплексного числа

На приведенном ниже рисунке точками изображены комплексные числа. Геометрически найдите абсолютные величины этих чисел
Записывать ответ следует в следующем порядке: $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}$

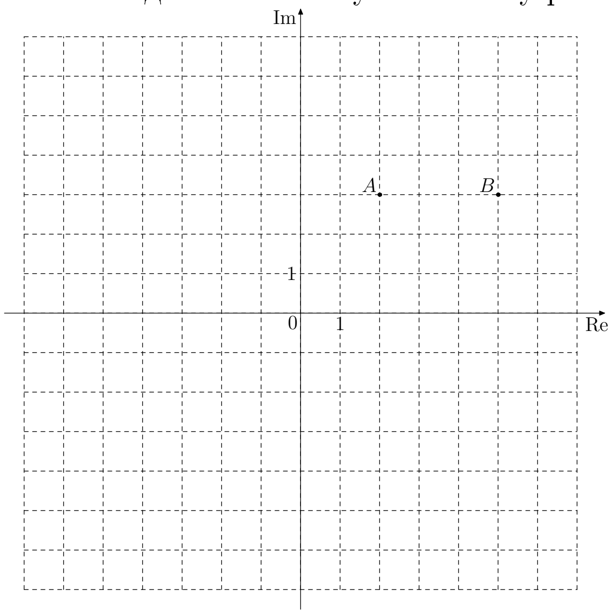


Ответ (типа 'real_list'): `5,sqrt(18),sqrt(20),sqrt(34)`

Задача Complex3-37

- Вычисление абсолютной величины разности двух комплексных чисел
  - Вычисление расстояния между точками плоскости
  - Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке точками изображены комплексные числа. Геометрически найдите абсолютную величину разности этих чисел

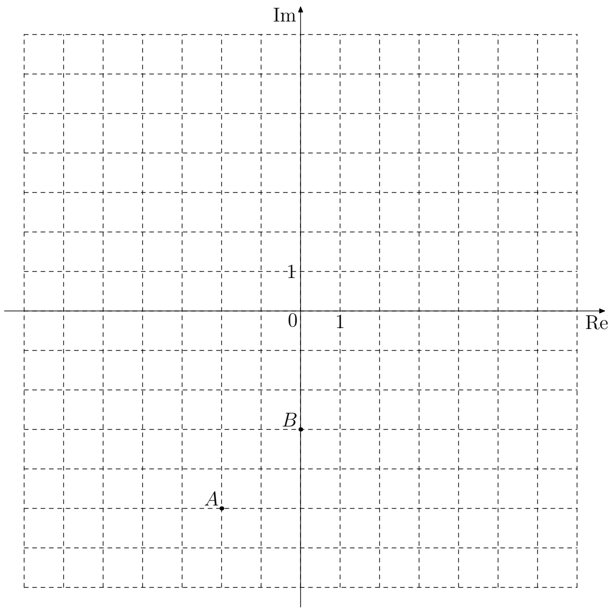


Ответ (типа 'real'): 3

Задача Complex3-38

- Вычисление абсолютной величины разности двух комплексных чисел
  - Вычисление расстояния между точками плоскости
  - Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке точками изображены комплексные числа. Геометрически найдите абсолютную величину разности этих чисел

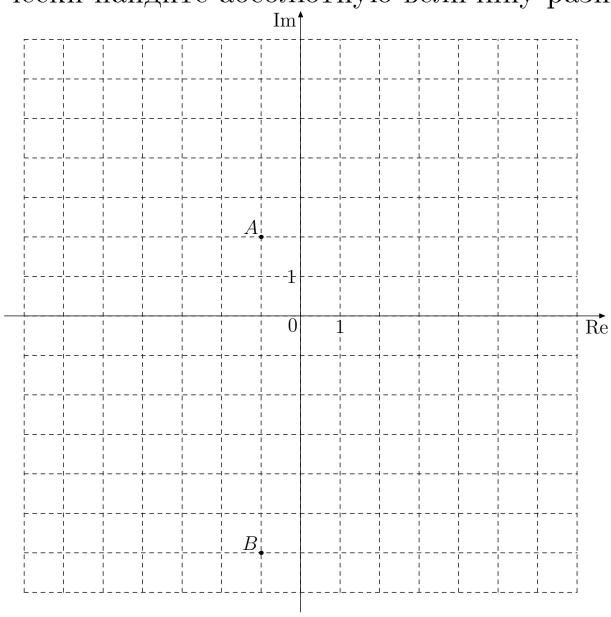


Ответ (типа 'real'): `sqrt(8)`

Задача Complex3-39

- Вычисление абсолютной величины разности двух комплексных чисел
  - Вычисление расстояния между точками плоскости
  - Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке точками изображены комплексные числа. Геометрически найдите абсолютную величину разности этих чисел



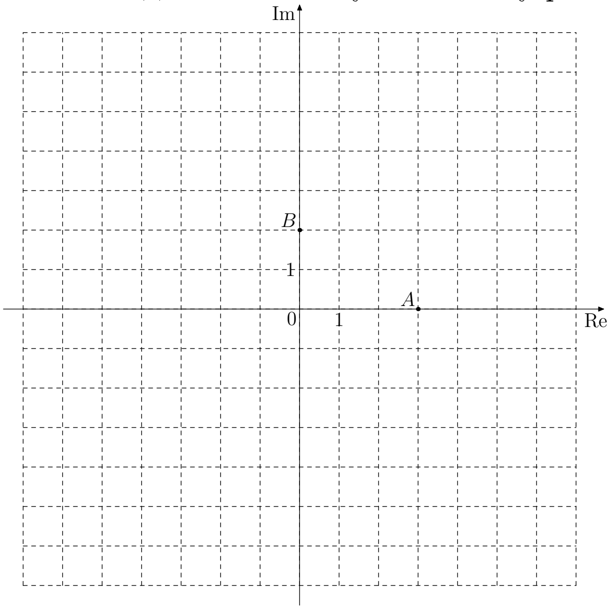
Ответ (типа 'real'): `8`

Задача Complex3-40

- Вычисление абсолютной величины разности двух комплексных чисел

- ○ Вычисление расстояния между точками плоскости
- ○ Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке точками изображены комплексные числа. Геометрически найдите абсолютную величину разности этих чисел

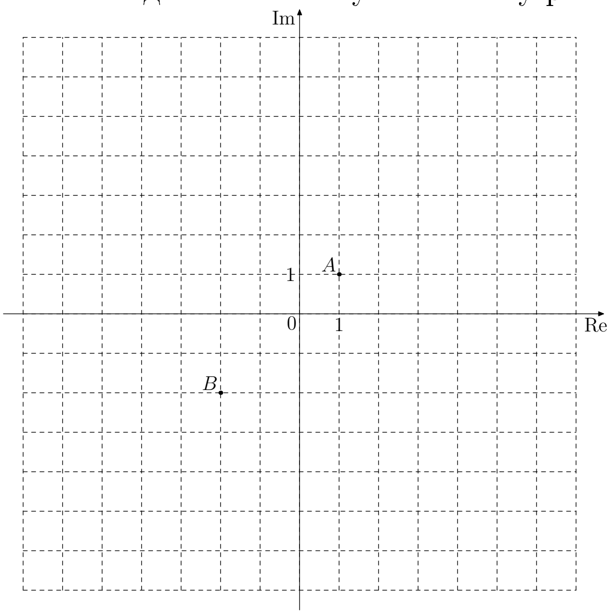


Ответ (типа 'real'): `sqrt(13)`

Задача Complex3-41

- • Вычисление абсолютной величины разности двух комплексных чисел
- ○ Вычисление расстояния между точками плоскости
- ○ Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел

На приведенном ниже рисунке точками изображены комплексные числа. Геометрически найдите абсолютную величину разности этих чисел

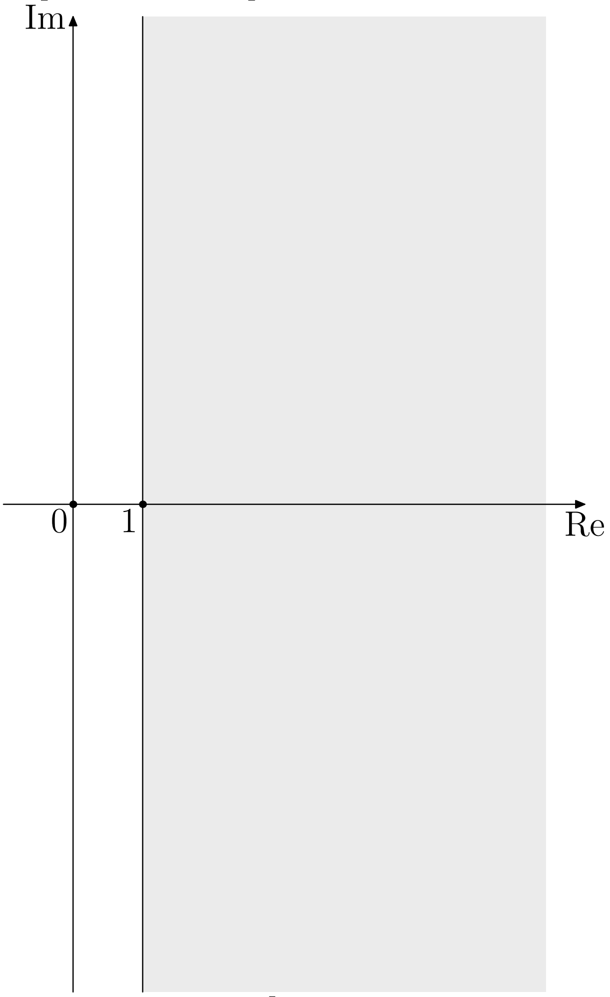


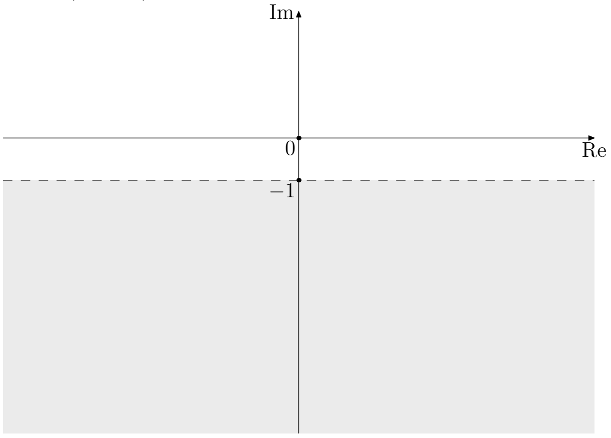
Ответ (типа 'real'): `sqrt(18)`

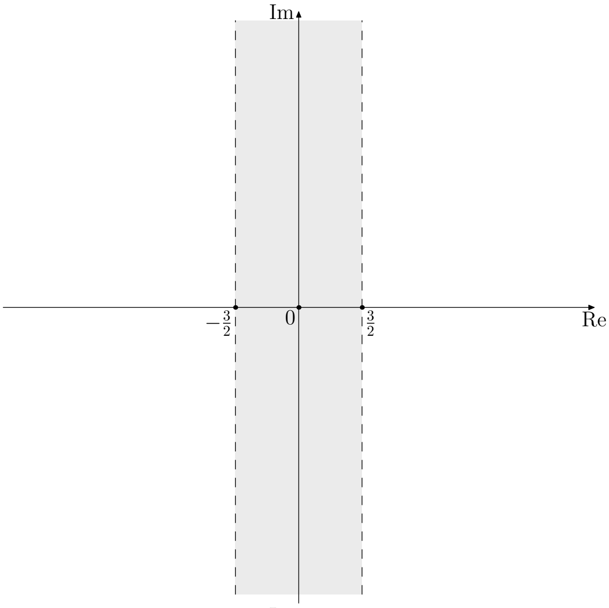
Задача Complex3-42

- Аналитическое описание множества на комплексной плоскости
- ○ Геометрический смысл действительной и мнимой частей комплексного числа
- ○ Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел
- ○ Геометрический смысл абсолютной величины комплексного числа

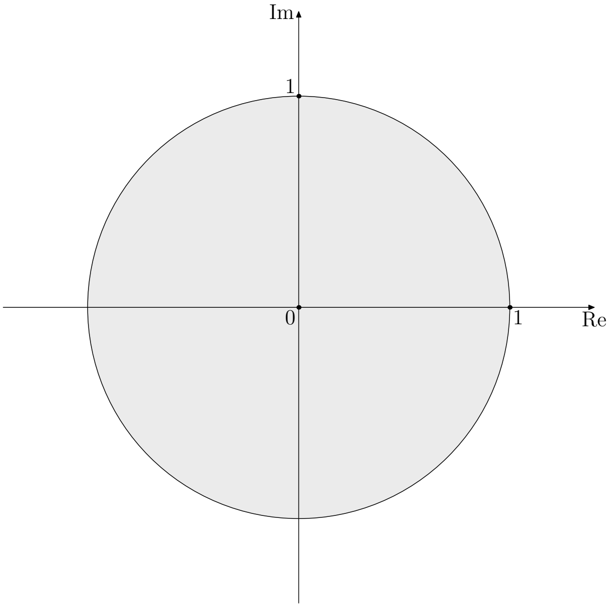
Перед Вами изображены множества точек комплексной плоскости



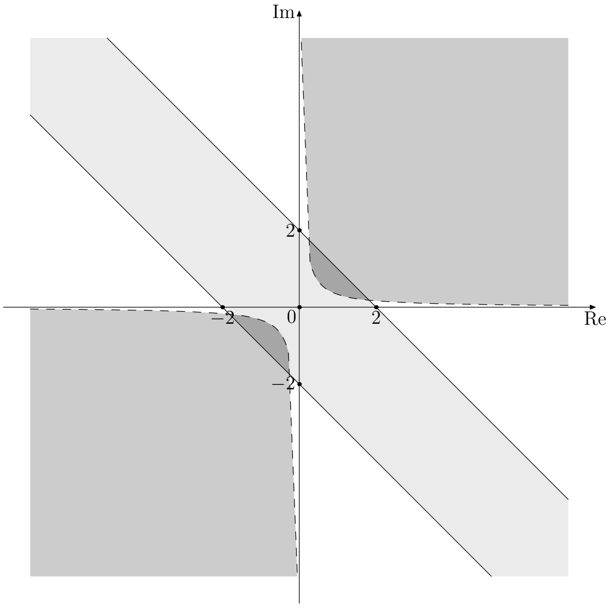




Im
Re
$-\frac{3}{2}$
0
$\frac{3}{2}$



Im
1
0
1
Re



Im
2
-2
0
2
Re
-2

Для каждого из этих множеств укажите условия, которые его описывают.

1. $|z| \leqslant 1$
2. $\operatorname{Re} z \geqslant 1$
3. $\begin{cases} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z & > & \frac{1}{3} \\ |\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| & \leqslant & 2 \end{cases}$
4. $\operatorname{Im} z < -1$
5. $|\operatorname{Re} z| < \frac{3}{2}$

Ответ (типа 'number_list'): 2,4,5,1,3

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex3-43

- Отыскание числа решений системы уравнений геометрическим способом
- ○ Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел

Найдите геометрически, сколько решений имеет следующая система уравнений.

$$\begin{cases} |z| & = & 4 \\ |z+3+3i| & = & 2 \end{cases}$$

Для этого на комплексной плоскости следует изобразить множества точек, которые описывает каждое из уравнений системы, и посчитать, в скольких точках эти множества пересекаются.

Ответ (типа 'number'): 2

Задача Complex3-44

- Отыскание числа решений системы уравнений геометрическим способом
- ○ Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел

Найдите геометрически, сколько решений имеет следующая система уравнений.

$$\begin{cases} |z+1-i| & = & 2 \\ |z-2-3i| & = & 1 \end{cases}$$

Для этого на комплексной плоскости следует изобразить множества точек, которые описывает каждое из уравнений системы, и посчитать, в скольких точках эти множества пересекаются.

Ответ (типа 'number'): 0

Задача Complex3-45

- Отыскание числа решений системы уравнений геометрическим способом
- ○ Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел

Найдите геометрически, сколько решений имеет следующая система уравнений.

$$\begin{cases} |z-3i| & = & 3 \\ |z-i| & = & 1 \end{cases}$$

Для этого на комплексной плоскости следует изобразить множества точек, которые описывает каждое из уравнений системы, и посчитать, в скольких точках эти множества пересекаются.

Ответ (типа 'number'): `1`

Задача Complex3-46

- Отыскание числа решений системы уравнений геометрическим способом
  - Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел

Найдите геометрически, сколько решений имеет следующая система уравнений.

$$\begin{cases} |z-3| & = & 3 \\ |z-3+5i| & = & 2 \end{cases}$$

Для этого на комплексной плоскости следует изобразить множества точек, которые описывает каждое из уравнений системы, и посчитать, в скольких точках эти множества пересекаются.

Ответ (типа 'number'): `1`

Задача Complex3-47

- Отыскание числа решений системы уравнений геометрическим способом
  - Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел

Найдите геометрически, сколько решений имеет следующая система уравнений.

$$\begin{cases} |z-3| & = & 4 \\ |z-4-2i| & = & 1 \end{cases}$$

Для этого на комплексной плоскости следует изобразить множества точек, которые описывает каждое из уравнений системы, и посчитать, в скольких точках эти множества пересекаются.

Ответ (типа 'number'): `0`

4 Тригонометрическая форма комплексного числа

Тема урока. Полярная система координат, тригонометрическая форма комплексного числа, умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел, умножение и возведение в степень комплексных чисел геометрическим способом.

Список умений «Предполагаемые»

1. Понятие луча
   используется в задачах: 8
2. Понятие отрезка
   используется в задачах: 8
3. Понятие угла. Мера угла
   используется в задачах: 8
4. Понятие прямоугольной декартовой системы координат
   используется в задачах: 9
5. Отыскание угла по заданным значениям функций синус и коснус
   развивается в задачах: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
6. Понятие алгебраической формы комплексного числа
   используется в задачах: 24
7. Вычисление абсолютной величины комплексного числа
   используется в задачах: 18, 19, 20, 21, 22, 23
8. Геометрический смысл комплексного числа
   используется в задачах: 10
9. Геометрический смысл абсолютной величины комплексного числа
   используется в задачах: 9

Список умений «Основные»

1. Понятие полярной системы координат
   развивается в задачах: 8
   используется в задачах: 9
2. Тригонометрическая форма комплексного числа
   развивается в задачах: 9
   используется в задачах: 10, 24, 25, 42
3. Способы отыскания аргумента комплексного числа
   развивается в задачах: 10
   используется в задачах: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17
4. Отыскание аргумента комплексного числа
   развивается в задачах: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17
   используется в задачах: 18, 19, 20, 21, 22, 23

5. Запись комплексного числа в тригонометрической форме
   развивается в задачах: 18, 19, 20, 21, 22, 23
6. Перевод комплексного числа из тригонометрической формы в алгебраическую
7. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме
   развивается в задачах: 25
   используется в задачах: 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36
8. Вычисление произведения комплексных чисел в тригонометрической форме
   развивается в задачах: 26, 27, 28, 29, 30
9. Вычисление частного комплексных чисел в тригонометрической форме
   развивается в задачах: 31, 32, 33, 34, 35
10. Геометрический смысл произведения комплексных чисел
    развивается в задачах: 36
    используется в задачах: 37, 38, 39, 40, 41, 48
11. Умножение комплексных чисел геометрическим способом
    развивается в задачах: 37, 38, 39, 40, 41
12. Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра
13. Применение формулы Муавра
    развивается в задачах: 43, 44, 45, 46, 47
14. Геометрический смысл степени комплексного числа
    развивается в задачах: 48
    используется в задачах: 49, 50, 51, 52, 53
15. Отыскание степени комплексного числа геометрическим способом
    развивается в задачах: 49, 50, 51, 52, 53

Задача Complex4-0

- Отыскание угла по заданным значениям функций синус и коснус

Найти угол φ из промежутка $(-\pi, \pi]$, для которого выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} \cos\varphi &= 0 \\ \sin\varphi &= 1 \end{cases}$$

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\mathrm{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string`'): `pi/2`

Задача Complex4-1

- Отыскание угла по заданным значениям функций синус и коснус

Найти угол φ из промежутка $(-\pi, \pi]$, для которого выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} \cos\varphi &= -1 \\ \sin\varphi &= 0 \end{cases}$$

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string`'): `pi`

Задача Complex4-2

- Отыскание угла по заданным значениям функций синус и коснус

Найти угол φ из промежутка $(-\pi, \pi]$, для которого выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} \cos\varphi &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string`'): `-3*pi/4`

Задача Complex4-3

- Отыскание угла по заданным значениям функций синус и коснус

Найти угол φ из промежутка $(-\pi, \pi]$, для которого выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} \cos\varphi &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string`'): `3*pi/4`

Задача Complex4-4

- Отыскание угла по заданным значениям функций синус и коснус

Найти угол φ из промежутка $(-\pi, \pi]$, для которого выполняются следующие равенства:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos\varphi & = & \frac{1}{2} \\ \sin\varphi & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\mathrm{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi.

Ответ (типа 'string'): `pi/3`

Задача Complex4-5

- Отыскание угла по заданным значениям функций синус и коснус

Найти угол φ из промежутка $(-\pi, \pi]$, для которого выполняются следующие равенства:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos\varphi & = & -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\mathrm{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi.

Ответ (типа 'string'): `2*pi/3`

Задача Complex4-6

- Отыскание угла по заданным значениям функций синус и коснус

Найти угол φ из промежутка $(-\pi, \pi]$, для которого выполняются следующие равенства:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos\varphi & = & \frac{5}{13} \\ \sin\varphi & = & 1\frac{12}{13} \end{array}\right.$$

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\mathrm{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string'): `arctg(12/5)`

Задача Complex4-7

- Отыскание угла по заданным значениям функций синус и коснус

Найти угол φ из промежутка $(-\pi, \pi]$, для которого выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} \cos\varphi & = & \frac{21}{29} \\ \sin\varphi & = & \frac{20}{29} \end{cases}$$

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string'): `arctg(20/21)`

Задача Complex4-8

- Понятие полярной системы координат
  - Понятие луча
  - Понятие отрезка
  - Понятие угла. Мера угла

Полярная система координат на плоскости задается указанием точки, называемой полюсом, и луча, выходящего из полюса и называемого полярным лучом. Для того, чтобы найти координаты произвольной точки плоскости в полярной системе координат, необходимо провести отрезок, соединяющий точку с полюсом. Первой полярной координатой точки является длина проведенного отрезка (или величина расстояния от точки до полюса), второй полярной координатой - величина угла, отсчитываемого от полярного луча до отрезка против движения часовой стрелки. Все точки плоскости кроме полюса единственным образом определяются парой своих координат (ρ, φ)[tex], где [tex]$0 < \rho < +\infty, \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi$. Полюс не имеет второй координаты и определяется условием $\rho = 0$.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Источник задачи: Дыбин В.Б., Привалов И.И.

Задача Complex4-9

- Тригонометрическая форма комплексного числа
  - Понятие прямоугольной декартовой системы координат
  - Геометрический смысл абсолютной величины комплексного числа
  - Понятие полярной системы координат

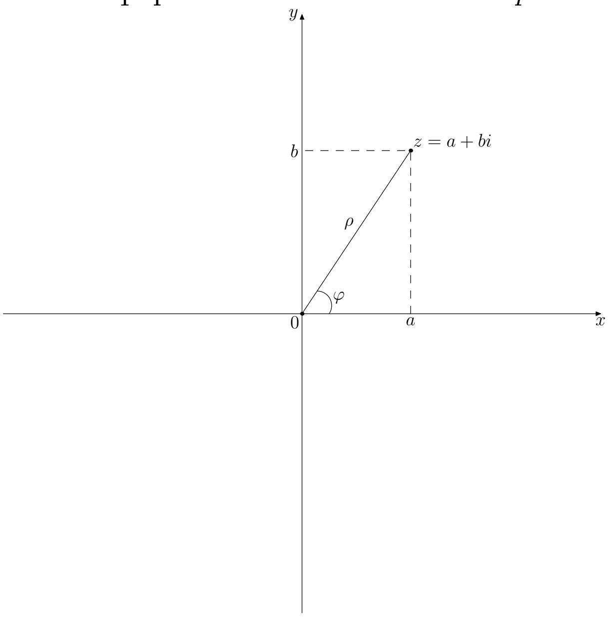
Совместим прямоугольную декартову и полярную системы координат на комплексной плоскости так, чтобы полюс совпадал с началом координат, а полярный луч - с положительной частью действительной оси. Тогда декартовы и полярные координаты точки комплексной плоскости, изображающей комплексное число $z = a + bi$ (см. рисунок), будут связаны формулами:

$$\begin{cases} a = \rho\cos\varphi \\ b = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Поэтому число z может быть записано в виде

$$z = a + bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

. Такая форма записи называется *тригонометрической формой комплексного числа.*



Из геометрического смысла абсолютной величины комплексного числа следует, что $|z| = \rho$, то есть абсолютная величина числа z равна полярному радиусу соответствующей точки комплексной плоскости.

Действительное число φ называют аргументом комплексного числа z и обозначают $\arg z$[tex]. Из формул связи координат следует, что [tex]

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Эти условия позволяют однозначно определить $\arg z$[tex].

Из [tex]2π - периодичности функций синус и косинус следует, что аргумент каждого **отличного от нуля** комплексного числа имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на кратное 2π. Число0 - единственное комплексное число, аргумент которого неопределен.

Из того, что аргумент комплексного числа принимает бесконечное множество значений следует, что тригонометрическая форма комплексного числа определяется неединственным образом (с точностью до кратного 2π значения аргумента).

Ответ (типа '`void`'): не требуется

Источник задачи: Дыбин В.Б., Привалов И.И.

Задача Complex4-10

- Способы отыскания аргумента комплексного числа
  - Геометрический смысл комплексного числа
  - Тригонометрическая форма комплексного числа

Как уже было сказано, аргумент числа $z \neq 0$[tex] всегда можно однозначно определить по формулам [tex]

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

(здесь $\varphi = \arg z$)

Однако существует и более простой способ: $\arg z$ изображает угол, на который необходимо повернуть положительное направление действительной оси, чтобы оно совпадало с направлением вектора z в комплексной плоскости, считая этот угол положительным, если вращение осуществляется против часовой стрелки, и отрицательным - в противном случае.

Ответ (типа '`void`'): не требуется

Задача Complex4-11

- Отыскание аргумента комплексного числа
  - Способы отыскания аргумента комплексного числа

Найдите аргумент числа 1.

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string`'): `0`

Задача Complex4-12

- Отыскание аргумента комплексного числа
  - Способы отыскания аргумента комплексного числа

Найдите аргумент числа i.

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string'): `pi/2`

Задача Complex4-13

- Отыскание аргумента комплексного числа
  - Способы отыскания аргумента комплексного числа

Найдите аргумент числа $1 + i$.

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string'): `pi/4`

Задача Complex4-14

- Отыскание аргумента комплексного числа
  - Способы отыскания аргумента комплексного числа

Найдите аргумент числа $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$.

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string'): `pi/6`

Задача Complex4-15

- Отыскание аргумента комплексного числа
  - Способы отыскания аргумента комплексного числа

Найдите аргумент числа $-1 + \sqrt{3}i$.

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string'): `2*pi/3`

Задача Complex4-16

- Отыскание аргумента комплексного числа
  - Способы отыскания аргумента комплексного числа

Найдите аргумент числа $-2-3i$.

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string'): `-pi+arctg(3/2)`

Задача Complex4-17

- Отыскание аргумента комплексного числа
  - Способы отыскания аргумента комплексного числа

Найдите аргумент числа $-4+2i$.

Ответ следует давать в радианах. При необходимости для записи ответа используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string'): `pi-arctg(1/2)`

Задача Complex4-18

- Запись комплексного числа в тригонометрической форме
  - Вычисление абсолютной величины комплексного числа
  - Отыскание аргумента комплексного числа

Запишите комплексное число $\frac{5}{2}$ в тригонометрической форме.

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string_list'): `5/2,0`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex4-19

- Запись комплексного числа в тригонометрической форме
  - Вычисление абсолютной величины комплексного числа
  - Отыскание аргумента комплексного числа

Запишите комплексное число $1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию arctg(x).
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string_list`'): `2,pi/3`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex4-20

- Запись комплексного числа в тригонометрической форме
  - Вычисление абсолютной величины комплексного числа
  - Отыскание аргумента комплексного числа

Запишите комплексное число $3i$ в тригонометрической форме.

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию arctg(x).
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string_list`'): `3,pi/2`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex4-21

- Запись комплексного числа в тригонометрической форме
  - Вычисление абсолютной величины комплексного числа
  - Отыскание аргумента комплексного числа

Запишите комплексное число $-1 + i$ в тригонометрической форме.

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию arctg(x).
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string_list`'): `sqrt(2),3*pi/4`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex4-22

- Запись комплексного числа в тригонометрической форме
  - Вычисление абсолютной величины комплексного числа
  - Отыскание аргумента комплексного числа

Запишите комплексное число $-3-\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию arctg(x).
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string_list'): `2*sqrt(3),-5*pi/6`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex4-23

- Запись комплексного числа в тригонометрической форме
  - Вычисление абсолютной величины комплексного числа
  - Отыскание аргумента комплексного числа

Запишите комплексное число $\frac{-7i}{3}$ в тригонометрической форме.

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию arctg(x).
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string_list'): `7/3,-pi/2`

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex4-24

- Перевод комплексного числа из тригонометрической формы в алгебраическую
  - Тригонометрическая форма комплексного числа
  - Понятие алгебраической формы комплексного числа

Для того, чтобы записать комплексное число $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в алгебраической форме, необходимо известные значения абсолютной величины и модуля числа z (ρ и φ) подставить в уравнения

$$\begin{cases} a & = & \rho \\ \cos\varphi & & \\ b & = & \rho \\ \sin\varphi & & \end{cases}$$

Здесь a и b - действительная и мнимая части числа z соответственно. Тогда $z=a+bi$.

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex4-25

- Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме
- Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

. Нетрудно проверить, что справедливы следующие формулы:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad z_2 \neq 0$$

Из этих формул следует, что

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

Кроме того, учитывая, что аргумент комплексного числа принимает бесконечное множество значений, имеем:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi j, \quad j \in \mathbb{Z}$$

Ответ (типа '`void`'): не требуется

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex4-26

- Вычисление произведения комплексных чисел в тригонометрической форме
- Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Найдите произведение чисел $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ и $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию $\mathrm{arctg}(x)$.

Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string_list`'): `2,0`

Задача Complex4-27

- Вычисление произведения комплексных чисел в тригонометрической форме
  - Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Найдите произведение чисел $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$ и $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию $\mathrm{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string_list'): `1,pi/2`

Задача Complex4-28

- Вычисление произведения комплексных чисел в тригонометрической форме
  - Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Найдите произведение чисел $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$ и $3\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию $\mathrm{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string_list'): `6,pi/12`

Задача Complex4-29

- Вычисление произведения комплексных чисел в тригонометрической форме
  - Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Найдите произведение чисел $4\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ и $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right)$.

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию $\mathrm{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string_list'): `-2,pi`

Задача Complex4-30

- Вычисление произведения комплексных чисел в тригонометрической форме
  - Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Найдите произведение чисел $5\left(\cos\frac{1}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\right)$ и $\frac{2}{3}\left(\cos\frac{2}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\right)$.

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию arctg(x).
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string_list'): `10/3,1`

Задача Complex4-31

- Вычисление частного комплексных чисел в тригонометрической форме
  - Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Найдите частное чисел $4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ и $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.
(Первое число разделите на второе)

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию arctg(x).
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string_list'): `2,pi/3`

Задача Complex4-32

- Вычисление частного комплексных чисел в тригонометрической форме
  - Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Найдите частное чисел $6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$ и $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$.
(Первое число разделите на второе)

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию arctg(x).
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа 'string_list'): `12,0`

Задача Complex4-33

- Вычисление частного комплексных чисел в тригонометрической форме
  - Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Найдите частное чисел $\cos\frac{2}{7}+i\sin\frac{2}{7}$ и $\cos\frac{1}{7}-i\sin\frac{1}{7}$.
(Первое число разделите на второе)

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию arctg(x).

Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string_list`'): `1,3/7`

Задача Complex4-34

- Вычисление частного комплексных чисел в тригонометрической форме
  - Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Найдите частное чисел $4\left(\cos\frac{2}{5}+i\sin\frac{2}{5}\right)$ и $3\left(\cos\frac{1}{5}+i\sin\frac{1}{5}\right)$.
(Первое число разделите на второе)

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string_list`'): `4/3,1/5`

Задача Complex4-35

- Вычисление частного комплексных чисел в тригонометрической форме
  - Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Найдите частное чисел $\frac{5}{4}\left(\cos\frac{7}{6}+i\sin\frac{7}{6}\right)$ и $\frac{4}{5}\left(\cos\frac{1}{6}+i\sin\frac{1}{6}\right)$.
(Первое число разделите на второе)

В ответе следует сперва указать абсолютную величину комплексного числа, а затем его аргумент. При необходимости для записи аргумента используйте функцию $\operatorname{arctg}(x)$.
Для записи числа π Вы вводите pi

Ответ (типа '`string_list`'): `25/16,1`

Задача Complex4-36

- Геометрический смысл произведения комплексных чисел
  - Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Рассморим точки комплексной плоскости z_1 и z_2 с полярными координатами (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2) соответственно. Как Вы уже знаете, модуль произведения коплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, а аргумент произведения - сумме аргументов. Поэтому точка z_1z_2 будет иметь координаты $(\rho_1\rho_2, \varphi_1+\varphi_2)$. Эти рассуждения позволяют геометрически находить произведения комплексных чисел.

В частности, если оба комплексных числа лежат на единичной окружности (то есть их абсолютные величины равны единице), то их произведение, очевидно, также лежит на этой окружности, в точке с полярным углом $\varphi_1 + \varphi_2$. Таким образом, если

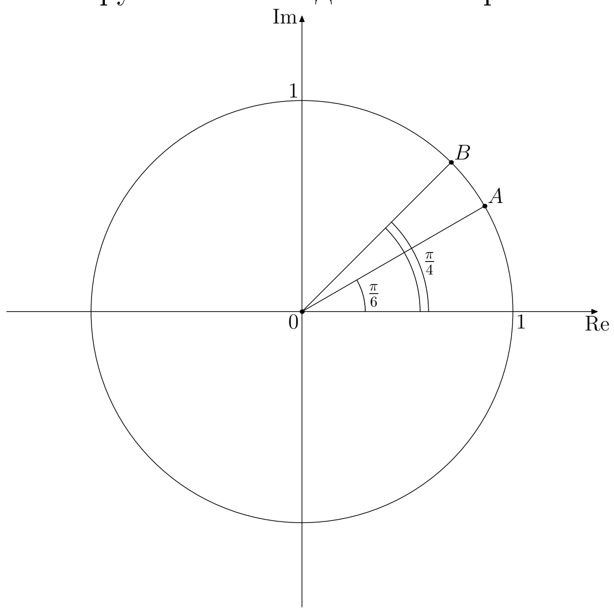
мы, например, повернем точку z_1 вдоль окружности на угол φ_2, то мы попадем в точку $z_1 z_2$.
(Положительным считаем угол, откладываемый **против** движения часовой стрелки)

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex4-37

- Умножение комплексных чисел геометрическим способом
  - Геометрический смысл произведения комплексных чисел

Пусть комплексным числам z_1 и z_2 отвечают точки A и B соответственно на единичной окружности. Найдите геометрически произведение этих чисел.



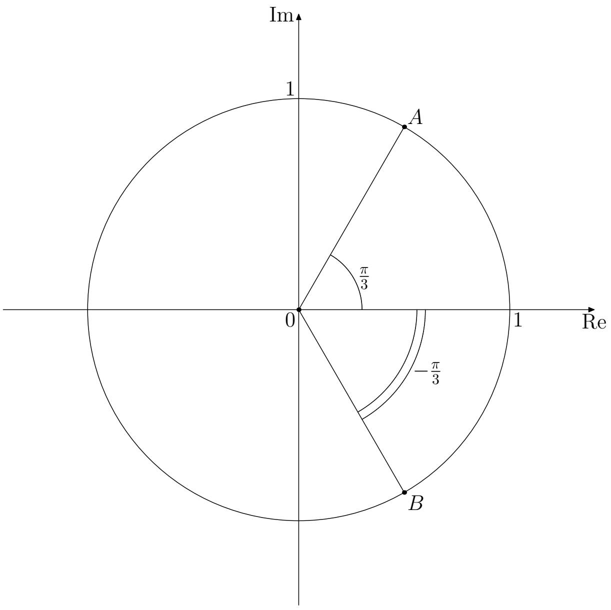
В ответе следует указать аргумент полученного комплексного числа.

Ответ (типа 'string'): `5*pi/12`

Задача Complex4-38

- Умножение комплексных чисел геометрическим способом
  - Геометрический смысл произведения комплексных чисел

Пусть комплексным числам z_1 и z_2 отвечают точки A и B соответственно на единичной окружности. Найдите геометрически произведение этих чисел.



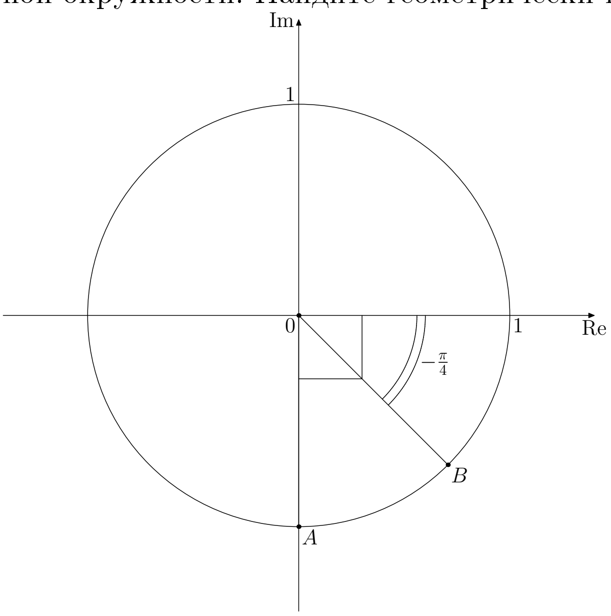
В ответе следует указать аргумент полученного комплексного числа.

Ответ (типа 'string'): `0`

Задача Complex4-39

- Умножение комплексных чисел геометрическим способом
  - Геометрический смысл произведения комплексных чисел

Пусть комплексным числам z_1 и z_2 отвечают точки A и B соответственно на единичной окружности. Найдите геометрически произведение этих чисел.



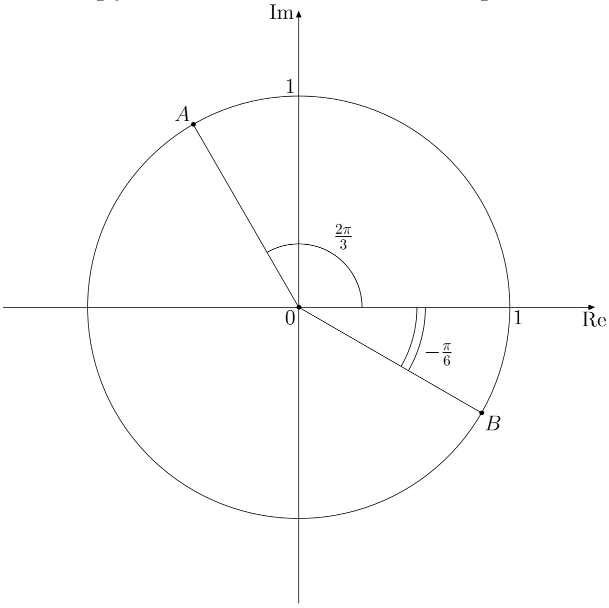
В ответе следует указать аргумент полученного комплексного числа.

Ответ (типа 'string'): `-3*pi/4`

Задача Complex4-40

- Умножение комплексных чисел геометрическим способом
- ○ Геометрический смысл произведения комплексных чисел

Пусть комплексным числам z_1 и z_2 отвечают точки A и B соответственно на единичной окружности. Найдите геометрически произведение этих чисел.



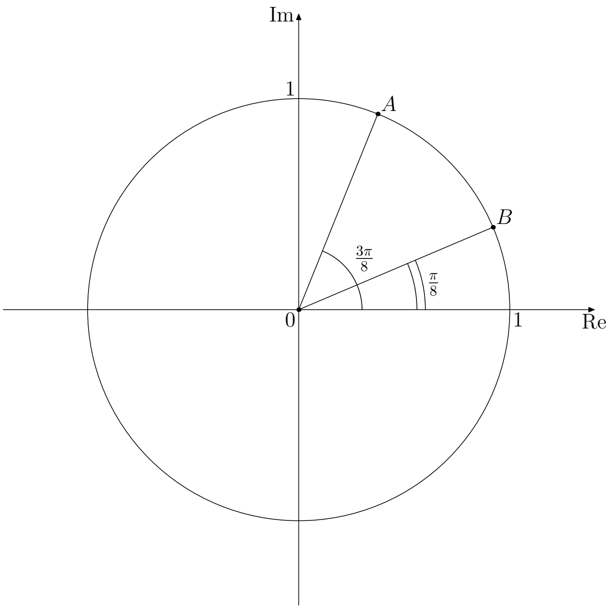
В ответе следует указать аргумент полученного комплексного числа.

Ответ (типа '`string`'): `pi/2`

Задача Complex4-41

- Умножение комплексных чисел геометрическим способом
- ○ Геометрический смысл произведения комплексных чисел

Пусть комплексным числам z_1 и z_2 отвечают точки A и B соответственно на единичной окружности. Найдите геометрически произведение этих чисел.



В ответе следует указать аргумент полученного комплексного числа.

Ответ (типа 'string'): `pi/2`

Задача Complex4-42

- Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра
- ○ Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть комплексное число z задано в тригонометрической форме:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Тогда

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}$$

Эта формула называется формулой Муавра. Из нее следует, что

$$|z^n| = |z|^n$$

$$\arg z^n = n\arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ (типа 'void'): не требуется

Источник задачи: Дыбин В.Б.

Задача Complex4-43

- Применение формулы Муавра
- ○ Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра

Вычислите значение выражения при помощи формулы Муавра.

$$(1+i)^4$$

Вводить ответ следует как арифметический вектор.

Ответ (типа 'complex'): `(-4,0)`

Задача Complex4-44

- Применение формулы Муавра
  - Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра

Вычислите значение выражения при помощи формулы Муавра.

$$(1-i)^7$$

Вводить ответ следует как арифметический вектор.

Ответ (типа 'complex'): `(8,8)`

Задача Complex4-45

- Применение формулы Муавра
  - Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра

Вычислите значение выражения при помощи формулы Муавра.

$$(1+\sqrt{3}i)^3$$

Вводить ответ следует как арифметический вектор.

Ответ (типа 'complex'): `(-8,0)`

Задача Complex4-46

- Применение формулы Муавра
  - Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра

Вычислите значение выражения при помощи формулы Муавра.

$$(-1-i)^10$$

Вводить ответ следует как арифметический вектор.

Ответ (типа 'complex'): `(0,32)`

Задача Complex4-47

- Применение формулы Муавра
  - Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра

Вычислите значение выражения при помощи формулы Муавра.

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{12}$$

Вводить ответ следует как арифметический вектор.

Ответ (типа 'complex'): `(-64,0)`

Источник задачи: Фаддеев Д.К., Соминский И.С.

Задача Complex4-48

- Геометрический смысл степени комплексного числа
  - Геометрический смысл произведения комплексных чисел

Геометрическая интерпритация произведения комплексных чисел позволяет найти любую натуральную степень комплексного числа. Если точка z имела координаты (ρ, φ), то точка z^n будет иметь координаты $(\rho^n, n\varphi)$. В этом заключается геометрический смысл степени комплексного числа.

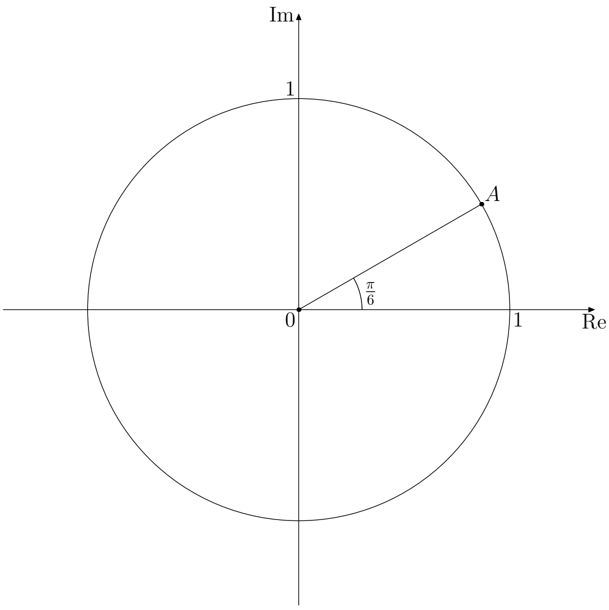
В частности, если комплексное число z лежит на единичной окружности, то повернув его $n-1$ раз вдоль этой окружности на угол φ, мы попадем в точку z^n. (Положительным считаем угол, откладываемый **против** движения часовой стрелки)

Ответ (типа 'void'): не требуется

Задача Complex4-49

- Отыскание степени комплексного числа геометрическим способом
  - Геометрический смысл степени комплексного числа

Пусть комплексному числу z отвечает точка A на единичной окружности. Найдите геометрически число z^4.



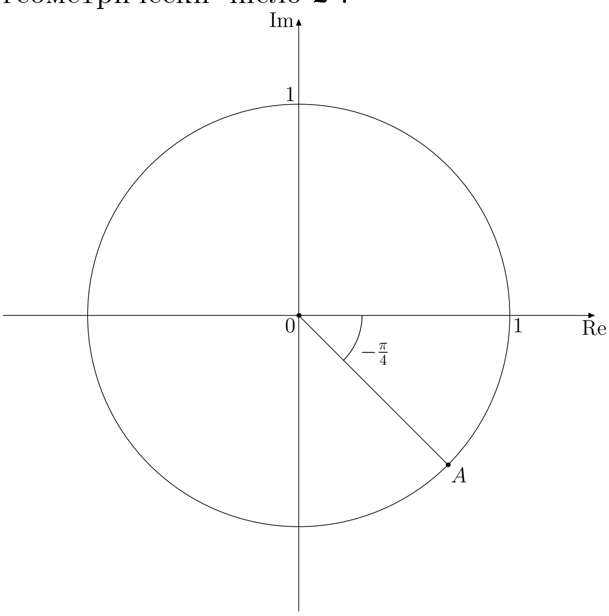
В ответе следует указать аргумент полученного комплексного числа.

Ответ (типа 'string'): `2*pi/3`

Задача Complex4-50

- Отыскание степени комплексного числа геометрическим способом
- ◦ Геометрический смысл степени комплексного числа

Пусть комплексному числу z отвечает точка A на единичной окружности. Найдите геометрически число z^3.



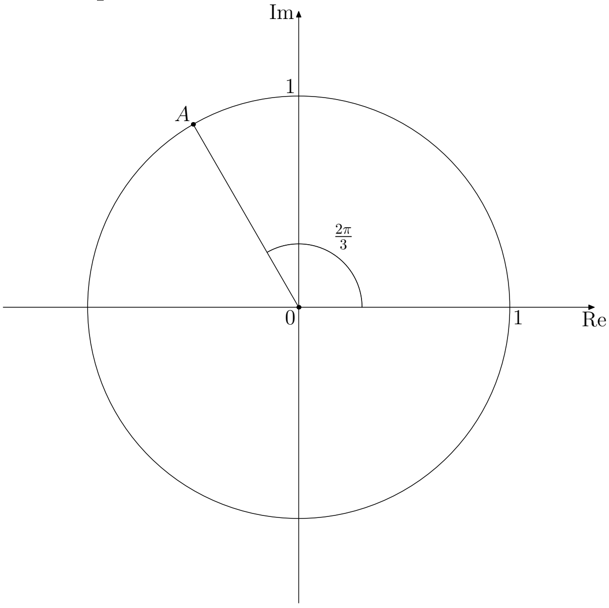
В ответе следует указать аргумент полученного комплексного числа.

Ответ (типа 'string'): `-3*pi/4`

Задача Complex4-51

- Отыскание степени комплексного числа геометрическим способом
- ○ Геометрический смысл степени комплексного числа

Пусть комплексному числу z отвечает точка A на единичной окружности. Найдите геометрически число z^4.



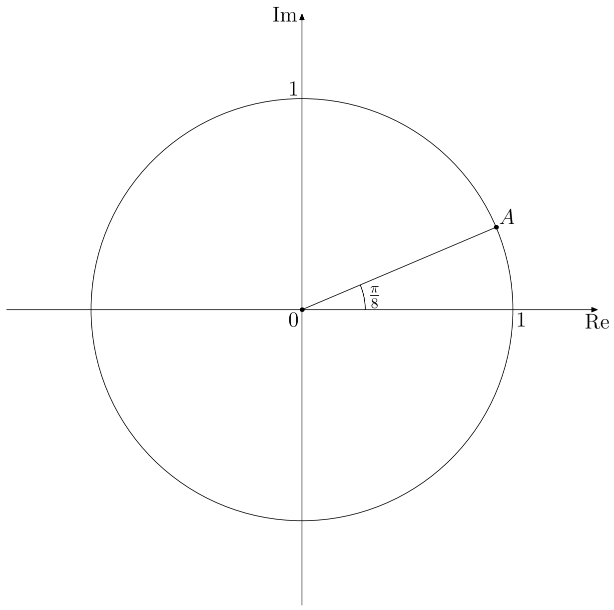
В ответе следует указать аргумент полученного комплексного числа.

Ответ (типа '`string`'): `2*pi/3`

Задача Complex4-52

- Отыскание степени комплексного числа геометрическим способом
- ○ Геометрический смысл степени комплексного числа

Пусть комплексному числу z отвечает точка A на единичной окружности. Найдите геометрически число z^6.



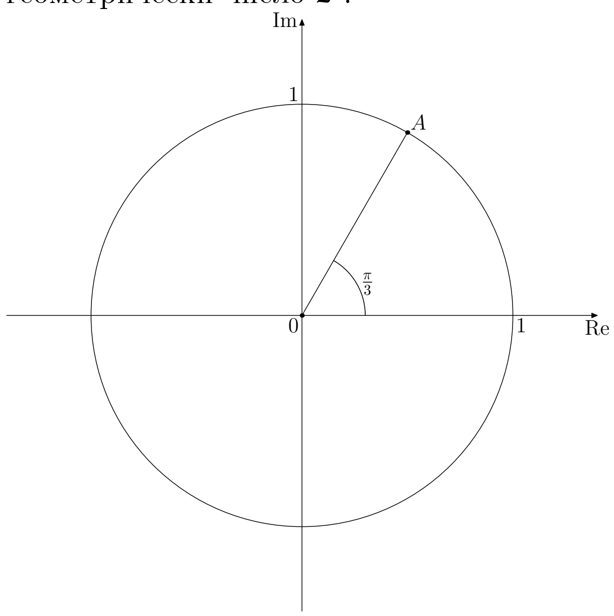
В ответе следует указать аргумент полученного комплексного числа.

Ответ (типа 'string'): `3*pi/4`

Задача Complex4-53

- Отыскание степени комплексного числа геометрическим способом
- ○ Геометрический смысл степени комплексного числа

Пусть комплексному числу z отвечает точка A на единичной окружности. Найдите геометрически число z^5.



В ответе следует указать аргумент полученного комплексного числа.

Ответ (типа 'string'): `-pi/3`

Список литературы

[1] *Дыбин В. Б.* Комплексные числа и многочлены. Методические указания по курсу "Линейная алгебра". Выпуск 4. — Ростов-на-Дону, 1996.

[2] *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1972.

[3] *Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Арманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1975.

[4] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1968.

[5] *Привалов И.И.* Введению в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984.