Алгебраическая форма комплексного числа. Учебная презентация

А. В. Лихацкий

Руководитель: Е. А. Максименко

Южный федеральный университет

14 апреля 2008 г.

Содержание

Содержание

Определение комплексного числа как пары чисел

Определение комплексного числа как пары чисел

Комплексным числом называют пару (a, b) действительных чисел a и b, взятых в определенном порядке.

Определение комплексного числа как пары чисел

Определение комплексного числа как пары чисел

Комплексным числом называют пару (a, b) действительных чисел a и b, взятых в определенном порядке.

Определение равенства комплексных чисел

Две пары $(a; b)$ и $(c; d)$ задают одно и тоже комплексное число в том и только в том случае, когда они совпадают, то есть когда $a = c$ и $b = d$.

$$(a; b) = (c; d) \Longleftrightarrow \begin{cases} a = c; \\ b = d. \end{cases}$$

Определение комплексного числа как пары чисел

Определение комплексного числа как пары чисел

Комплексным числом называют пару (a, b) действительных чисел a и b, взятых в определенном порядке.

Определение равенства комплексных чисел

Две пары $(a; b)$ и $(c; d)$ задают одно и тоже комплексное число в том и только в том случае, когда они совпадают, то есть когда $a = c$ и $b = d$.

$$(a; b) = (c; d) \iff \begin{cases} a = c; \\ b = d. \end{cases}$$

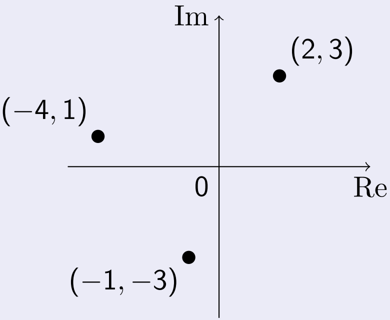
Определение действительной и мнимой частей

Если $z = (a; b)$ — комплексное число,
то a называют его **действительной частью**, а b — **мнимой частью**.
Приняты следующие обозначения: $a = \mathrm{Re}\, z$, $b = \mathrm{Im}\, z$.

Определение комплексного числа как пары чисел

Определение комплексной плоскости

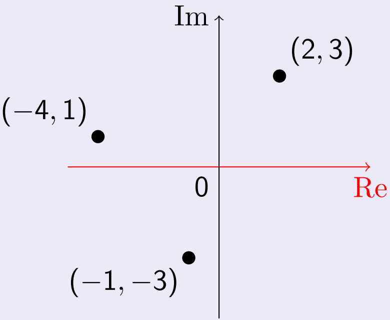
Плоскость, точки которой отождествляются с комплексными числами, называется комплексной плоскостью.



Определение комплексного числа как пары чисел

Определение комплексной плоскости

Плоскость, точки которой отождествляются с комплексными числами, называется комплексной плоскостью.
Ось абсцисс называется действительной осью.



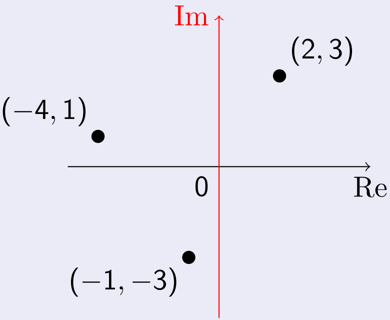
Определение комплексного числа как пары чисел

Определение комплексной плоскости

Плоскость, точки которой отождествляются с комплексными числами, называется комплексной плоскостью.

Ось абсцисс называется действительной осью.

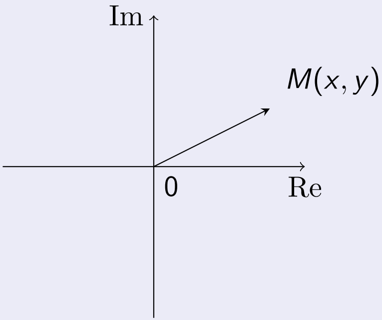
Ось ординат называется мнимой осью.



Определение комплексного числа как пары чисел

Комплексное число в виде радиус-вектора

Часто вместо точек на плоскости берут их радиус-векторы, то есть векторы $\overrightarrow{OM}$, идущие из начала координат $O(0;0)$ в точку $M(x;y)$. Разумеется, вместо радиус-векторов можно брать любые векторы, имеющие то же направление и ту же длину.



Операции над комплексными числами

Сумма и произведение пар чисел

Если $z = (a; b)$ и $w = (c; d)$, то

$$z + w = (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$

и

$$zw = (a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc).$$

Операции над комплексными числами

Свойства

ассоциативность:

$$
\begin{gathered}
(a;b)+((c;d)+(e;f))=((a;b)+(c;d))+(e;f),\\
(a;b)\cdot((c;d)\cdot(e;f))=((a;b)\cdot(c;d))\cdot(e;f);
\end{gathered}
$$

коммутативность:

$$
\begin{gathered}
(a;b)+(c;d)=(c;d)+(a;b),\\
(a;b)\cdot(c;d)=(c;d)\cdot(a;b);
\end{gathered}
$$

дистрибутивность:

$$(a;b)\cdot((c;d)+(e;f))=(a;b)\cdot(c;d)+(a;b)\cdot(e;f).$$

Операции над комплексными числами

Определение нуля

Нулем называется такое комплексное число $(x; y)$, что для произвольного числа $(a; b)$ выполняется равенство $(a; b) + (x; y) = (a; b)$.

Операции над комплексными числами

Определение нуля

Нулем называется такое комплексное число $(x; y)$, что для произвольного числа $(a; b)$ выполняется равенство $(a; b) + (x; y) = (a; b)$.

Из определения получаем $a + x = a$, $b + y = b$, откуда $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, нулем является пара $(0; 0)$, и только она.

Операции над комплексными числами

Определение нуля

Нулем называется такое комплексное число $(x; y)$, что для произвольного числа $(a; b)$ выполняется равенство $(a; b) + (x; y) = (a; b)$.

Из определения получаем $a + x = a$, $b + y = b$, откуда $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, нулем является пара $(0; 0)$, и только она.

Определение противоположного комплексного числа

Числом, противоположным к $(a; b)$, называется такая пара $(x; y)$, что $(a; b) + (x; y) = (0; 0)$. Очевидно, такая пара существует и является единственной: $x = -a$, $y = -b$.

Противоположное число обозначается через $-(a; b)$.

Операции над комплексными числами

Определение разности комплексных чисел

Разностью комплексных чисел $(c; d)$ и $(a; b)$ называется решение $(x; y)$ уравнения $(a; b) + (x; y) = (c; d)$.

Операции над комплексными числами

Определение разности комплексных чисел

Разностью комплексных чисел $(c; d)$ и $(a; b)$ называется решение $(x; y)$ уравнения $(a; b) + (x; y) = (c; d)$.

Очевидно, это решение существует и является единственным: $x = c - a$, $y = d - b$. Разность обозначается через $(c; d) - (a; b)$. Легко видеть, что разность $(c; d) - (a; b)$ есть сумма $(c; d)$ и числа, противоположного к $(a; b)$:

$$(c; d) - (a; b) = (c; d) + (-(a; b)) .$$

Операции над комплексными числами

Определение комплексной единицы

Единицей называется такое комплексное число $(x; y)$, что для произвольного числа $(a; b)$ выполняется равенство $(a; b)(x; y) = (a; b)$.

Операции над комплексными числами

Определение комплексной единицы

Единицей называется такое комплексное число $(x; y)$, что для произвольного числа $(a; b)$ выполняется равенство $(a; b)(x; y) = (a; b)$.

Определение обратного комплексного числа

Числом, обратным к $(a; b)$, называется такая пара $(x; y)$, что

$$(a; b)(x; y) = (1; 0).$$

Обратное число обозначается через $(a, b)^{-1}$.

Операции над комплексными числами

Определение комплексной единицы

Единицей называется такое комплексное число $(x; y)$, что для произвольного числа $(a; b)$ выполняется равенство $(a; b)(x; y) = (a; b)$.

Определение обратного комплексного числа

Числом, обратным к $(a; b)$, называется такая пара $(x; y)$, что

$$(a; b)(x; y) = (1; 0).$$

Обратное число обозначается через $(a, b)^{-1}$.

Формула обратного комплексного числа

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}; -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

Операции над комплексными числами

Определение частного комплексных чисел

Частным комплексных чисел $(c; d)$ и $(a; b)$ называется решение $(x; y)$ уравнения $(a; b) \cdot (x; y) = (c; d)$. Частное обозначается через $\frac{(c;d)}{(a;b)}$

Операции над комплексными числами

Определение частного комплексных чисел

Частным комплексных чисел $(c; d)$ и $(a; b)$ называется решение $(x; y)$ уравнения $(a; b) \cdot (x; y) = (c; d)$. Частное обозначается через $\frac{(c;d)}{(a;b)}$

Его мы можем получить из системы

$$\begin{cases} ax - by = c, \\ bx + ay = d. \end{cases}$$

Операции над комплексными числами

Определение частного комплексных чисел

Частным комплексных чисел $(c; d)$ и $(a; b)$ называется решение $(x; y)$ уравнения $(a; b) \cdot (x; y) = (c; d)$. Частное обозначается через $\frac{(c;d)}{(a;b)}$

Его мы можем получить из системы

$$\begin{cases} ax - by = c, & \times\ a \\ bx + ay = d. & \times\ b \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на a, второе - на b и складывая, получаем:

$$(a^2 + b^2)x = ac + bd$$

Операции над комплексными числами

Определение частного комплексных чисел

Частным комплексных чисел $(c; d)$ и $(a; b)$ называется решение $(x; y)$ уравнения $(a; b) \cdot (x; y) = (c; d)$. Частное обозначается через $\frac{(c;d)}{(a;b)}$

Его мы можем получить из системы

$$\begin{cases} ax - by = c, & \times\, b \\ bx + ay = d. & \times\, a \end{cases}$$

Умножая первое уравнение системы на b, второе - на a и, вычитая первое из второго, получаем:

$$(a^2 + b^2)y = ad - cb$$

Операции над комплексными числами

Определение частного комплексных чисел

Частным комплексных чисел $(c; d)$ и $(a; b)$ называется решение $(x; y)$ уравнения $(a; b) \cdot (x; y) = (c; d)$. Частное обозначается через $\frac{(c;d)}{(a;b)}$

Его мы можем получить из системы

$$\begin{cases} ax - by = c, \\ bx + ay = d. \end{cases}$$

В случае $a^2 + b^2 \neq 0$ имеем $\frac{(c;d)}{(a;b)} = \left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2}; \frac{ad-cb}{a^2+b^2} \right)$

Операции над комплексными числами

Заметим, что

$$\frac{(c; d)}{(a; b)} = (c; d) \cdot (a; b)^{-1}$$

Операции над комплексными числами

Заметим, что

$$\frac{(c; d)}{(a; b)} = (c; d) \cdot (a; b)^{-1}$$

Определение мнимой единицы

Пара $(0; 1)$ обозначается буквой i и называется мнимой единицей.
Легко проверить, что $(0; b) = bi$ и, следовательно, $(a; b) = a + ib$.

Содержание

Алгебраическая форма

Определение алгебраической формы

Запись $a + ib$ называется алгебраической формой комплексного числа $(a; b)$.

Алгебраическая форма

Определение алгебраической формы

Запись $a + ib$ называется алгебраической формой комплексного числа $(a; b)$.

Замечание о мнимой единице

Легко проверить, что

$$\boxed{i^2 = -1.}$$

Действительно:

$$i^2 = (0; 1)^2 = (0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0) = -1.$$

Поэтому работать с комплексными числами можно как с алгебраическими двучленами, зависящими от символа i, заменяя, где необходимо, i^2 на -1.

Алгебраическая форма

Пример

$$(4+i)\cdot(5+3i)+(3+i)\cdot(3-2i) = 20+12i+5i-3+9-6i+3i+2$$
$$= 28+14i$$

Алгебраическая форма

Пример

$$(4+i)\cdot(5+3i)+(3+i)\cdot(3-2i) = 20+12i+5i-3+9-6i+3i+2$$
$$= 28+14i$$

Замечание

На практике для частного используют следующий прием: умножают числитель и знаменатель дроби $\frac{c+di}{a+bi}$ на $a-bi$

Алгебраическая форма

Пример

$$\frac{(5+i)\cdot(7-6i)}{3+i}=\frac{41-23i}{3+i}$$

Раскроем скобки и приведем подобные.

Алгебраическая форма

Пример

$$\frac{(5+i)\cdot(7-6i)}{3+i} = \frac{41-23i}{3+i} = \frac{(41-23i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)}$$

Умножим числитель и знаменатель на $3-i$.

Алгебраическая форма

Пример

$$\begin{aligned}\frac{(5+i)\cdot(7-6i)}{3+i} &= \frac{41-23i}{3+i}\\ &= \frac{(41-23i)\cdot(3-i)}{(3+i)\cdot(3-i)}\\ &= \frac{123-41i-69i-23}{10}\\ &= \frac{100-110i}{10}\\ &= 10-11i\end{aligned}$$

Раскроем скобки, приведем подобные и разделим почленно на 10.

Алгебраическая форма

Пример

Записать комплексные числа в алгебраической форме и отметить на комплексной плоскости:

$$(3;-4), \qquad (7;5), \qquad (-2;3), \qquad (4;0), \qquad (0;-3).$$

Решение

Для любых $x, y \in \mathbb{R}$:

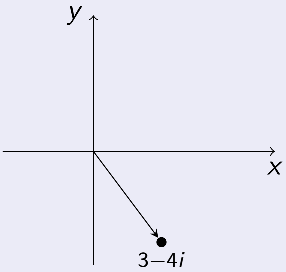
$$\begin{aligned}(x,y) &= (x,0) + (0,y)\\ &= (x,0) + y\cdot(0,1)\\ &= x + yi\end{aligned}$$

Алгебраическая форма

Пример

Записать комплексные числа в алгебраической форме и отметить на комплексной плоскости:

$$(3;-4),\qquad (7;5),\qquad (-2;3),\qquad (4;0),\qquad (0;-3).$$



Решение

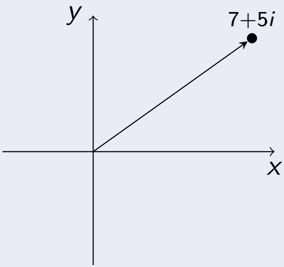
$$\begin{aligned}(3;-4) &= (3;0)+(0;-4)\\ &= (3;0)-4\cdot(0;-1)\\ &= 3-4i\end{aligned}$$

Алгебраическая форма

Пример

Записать комплексные числа в алгебраической форме и отметить на комплексной плоскости:

$$(3;-4), \qquad (7;5), \qquad (-2;3), \qquad (4;0), \qquad (0;-3).$$



Решение

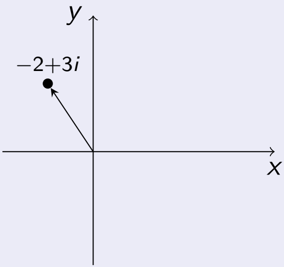
$$\begin{aligned}(7;5) &= (7;0) + (0;5)\\ &= (7;0) + 5\cdot(0;1)\\ &= 7+5i\end{aligned}$$

Алгебраическая форма

Пример

Записать комплексные числа в алгебраической форме и отметить на комплексной плоскости:

$$(3;-4), \qquad (7;5), \qquad (-2;3), \qquad (4;0), \qquad (0;-3).$$



Решение

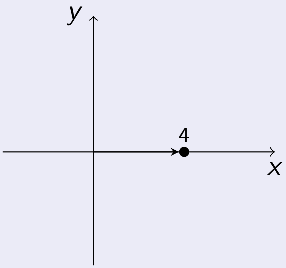
$$(-2;3) = -2+3i$$

Алгебраическая форма

Пример

Записать комплексные числа в алгебраической форме и отметить на комплексной плоскости:

$$(3;-4),\qquad (7;5),\qquad (-2;3),\qquad (4;0),\qquad (0;-3).$$



Решение

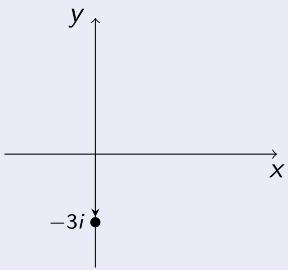
$$(4;0) = 4$$

Алгебраическая форма

Пример

Записать комплексные числа в алгебраической форме и отметить на комплексной плоскости:

$$(3;-4),\qquad (7;5),\qquad (-2;3),\qquad (4;0),\qquad (0;-3).$$



Решение

$$(0;-3) = -3i$$

Содержание

Сопряженные комплексные числа

Определение сопряженных чисел

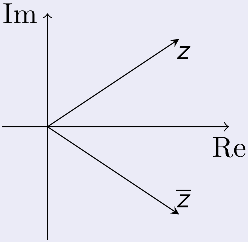
Два комплексных числа называются сопряженными, если они отличаются лишь знаком мнимой части.
Число, сопряженное комплексному числу z, обозначают через $\overline{z}$.

Сопряженные комплексные числа

Определение сопряженных чисел

Два комплексных числа называются сопряженными, если они отличаются лишь знаком мнимой части.

Число, сопряженное комплексному числу z, обозначают через $\overline{z}$.



Если $z = a + ib$, то $\overline{z} = a - ib$.

Сопряженные комплексные числа

Теорема 1 (о числе, сопряжённом с суммой)

Число, сопряженное с суммой комплексных чисел, равно сумме чисел, сопряженных со слагаемыми:

$$\overline{z + \omega} = \overline{z} + \overline{\omega}$$

Сопряженные комплексные числа

Теорема 1 (о числе, сопряжённом с суммой)

Число, сопряженное с суммой комплексных чисел, равно сумме чисел, сопряженных со слагаемыми:

$$\overline{z+\omega} = \overline{z} + \overline{\omega}$$

Доказательство

Пусть $z = a + bi$, $\omega = c + di$.
Тогда:

$$\begin{aligned}
\overline{z+\omega} &= \overline{(a+bi)+(c+di)} \\
&= a + c - (b+d)i \\
&= \overline{z} + \overline{\omega}
\end{aligned}$$

Сопряженные комплексные числа

Теорема 2 (о числе, сопряжённом с произведением)

Число, сопряженное с произведением комплексных чисел, равно произведению чисел, сопряженных с множителями:

$$\overline{z\omega} = \overline{z} \cdot \overline{\omega}.$$

Сопряженные комплексные числа

Теорема 2 (о числе, сопряжённом с произведением)

Число, сопряженное с произведением комплексных чисел, равно произведению чисел, сопряженных с множителями:

$$\overline{z\omega} = \overline{z} \cdot \overline{\omega}.$$

Доказательство

Если $z = a + bi$, $\omega = c + di$, то

$$\begin{aligned}\overline{z\omega} &= \overline{(a+bi)\cdot(c+di)}\\ &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\ &= ac-bd-(ad+bc)i.\end{aligned}$$

С другой стороны, $\overline{z} \cdot \overline{\omega} = (a - bi)\cdot(cdi) = ac - bd - (ad + bc)i$.

Сопряженные комплексные числа

Теорема 3 (о сопряжении обратного числа)

Если $z \neq 0$, то число, сопряженное с числом, обратным z, обратно числу, сопряженному с z:

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Сопряженные комплексные числа

Теорема 3 (о сопряжении обратного числа)

Если $z \neq 0$, то число, сопряженное с числом, обратным z, обратно числу, сопряженному с z:

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Доказательство

Из равенства $z \cdot \frac{1}{z} = 1$, по теореме 2 следует, что $\overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{1} = 1$. Тогда $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

Сопряженные комплексные числа

Теорема 3 (о сопряжении обратного числа)

Если $z \neq 0$, то число, сопряженное с числом, обратным z, обратно числу, сопряженному с z:

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Доказательство

Из равенства $z \cdot \frac{1}{z} = 1$, по теореме 2 следует, что $\overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{1} = 1$. Тогда $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

Следствие 1

$\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Сопряженные комплексные числа

Следствие 2

Если заменить в многочлене $P(z)$ с комплексными коэффициентами значение $z = z_0$ на сопряженное значение $\overline{z_0}$, а все коэффициенты - сопряженными им числами, то значение многочлена заменится на сопряженное.

Сопряженные комплексные числа

Следствие 2

Если заменить в многочлене $P(z)$ с комплексными коэффициентами значение $z = z_0$ на сопряженное значение $\overline{z_0}$, а все коэффициенты - сопряженными им числами, то значение многочлена заменится на сопряженное.

Доказательство

Если положить

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$
$$\overline{P(z)} = \overline{a_n} z^n + \overline{a_{n-1}} z^{n-1} + \ldots + \overline{a_0}$$

то утверждение записывается следующим образом: $\overline{P(z_0)} = \overline{P}(\overline{z_0})$.

Сопряженные комплексные числа

Доказательство (продолжение)

Для его доказательства достаточно заметить, что в силу теорем 1 и 2 и следствия 1 имеем:

$$\begin{aligned}
\overline{P(z_0)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n} \cdot \overline{z}^n + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z}^{n-1} + \ldots + \overline{a_0} \\
&= \overline{P}(\overline{z_0})
\end{aligned}$$

Сопряженные комплексные числа

Доказательство (продолжение)

Для его доказательства достаточно заметить, что в силу теорем 1 и 2 и следствия 1 имеем:

$$\begin{aligned}
\overline{P(z_0)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0} \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_0} \\
&= \overline{a_n} \cdot \overline{z}^n + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z}^{n-1} + \ldots + \overline{a_0} \\
&= \overline{P}(\overline{z_0})
\end{aligned}$$

Следствие 3

При замене в многочлене с действительными коэффициентами значения $z = z_0$ на сопряженное число $\overline{z_0}$ значение многочлена заменяется на сопряженное.

Сопряженные комплексные числа

Теорема 4 (о корне многочлена)

Если комплексное число z_0 является корнем многочлена $P(z)$, имеющего действительные коэффициенты, то и сопряженное с z_0 число $\overline{z_0}$ является корнем того же многочлена.

Сопряженные комплексные числа

Теорема 4 (о корне многочлена)

Если комплексное число z_0 является корнем многочлена $P(z)$, имеющего действительные коэффициенты, то и сопряженное с z_0 число $\overline{z_0}$ является корнем того же многочлена.

Доказательство

В следствии 2 было показано, что для многочленов с действительными коэффициентами верно равенство

$$P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)}$$

Так как по условию z_0 является корнем многочлена $P(z)$, то $P(z_0)$, а тогда $P(\overline{z_0}) = \overline{P(z_0)} = 0$, и потому $\overline{z_0}$ - корень многочлена $P(z)$.

Сопряженные комплексные числа

Пример: найти корни многочлена $x^2 + 2x + 2$

Сопряженные комплексные числа

Пример: найти корни многочлена $x^2 + 2x + 2$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2x + 2 &= x^2 + 2x + 1 + 1 \\
&= (x+1)^2 + 1
\end{aligned}
$$

Выделим полный квадрат

Сопряженные комплексные числа

Пример: найти корни многочлена $x^2 + 2x + 2$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 2 &= x^2 + 2x + 1 + 1 \\ &= (x+1)^2 + 1 \\ &= (x+1)^2 - i^2 \end{aligned}$$

$i^2 = -1$

Сопряженные комплексные числа

Пример: найти корни многочлена $x^2 + 2x + 2$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2x + 2 &= x^2 + 2x + 1 + 1 \\
&= (x+1)^2 + 1 \\
&= (x+1)^2 - i^2 \\
&= (x+1+i) \cdot (x+1-i)
\end{aligned}
$$

Разложим по разности квадратов

Сопряженные комплексные числа

Пример: найти корни многочлена $x^2 + 2x + 2$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 2 &= x^2 + 2x + 1 + 1 \\ &= (x+1)^2 + 1 \\ &= (x+1)^2 - i^2 \\ &= (x + 1 + i) \cdot (x + 1 - i) \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = -1 - i, x_2 = -1 + i$

Заметим, что $x_1 = \overline{x_2}$

Сопряженные комплексные числа

Теорема 5 (о сумме двух сопряженных чисел)

Сумма двух сопряженных комплексных чисел является действительным числом.

Сопряженные комплексные числа

Теорема 5 (о сумме двух сопряженных чисел)

Сумма двух сопряженных комплексных чисел является действительным числом.

Доказательство

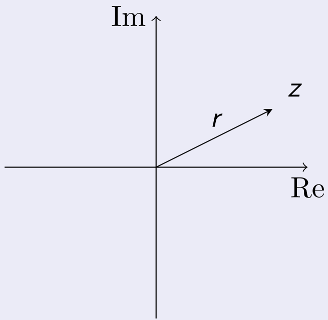
$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a.$$

Содержание

Абсолютная величина комплексного числа

Определение абсолютной величины

Модулем, или абсолютной величиной, комплексного числа $z = x + iy$ называется расстояние r точки z до начала координат.
Модуль числа z обозначается через $|z|$.



Абсолютная величина комплексного числа

Формула вычисления модуля

Применяя теорему Пифагора, получаем

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Абсолютная величина комплексного числа

Формула вычисления модуля

Применяя теорему Пифагора, получаем

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Модуль сопряженного числа

$$|z| = |\overline{z}|$$

Абсолютная величина комплексного числа

Теорема (о квадрате модуля)

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

Абсолютная величина комплексного числа

Теорема (о квадрате модуля)

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

Доказательство

Если $z = x + iy$, то

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Абсолютная величина комплексного числа

Модуль произведения

Для любых комплексных чисел выполняется равенство:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Абсолютная величина комплексного числа

Модуль произведения

Для любых комплексных чисел выполняется равенство:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Доказательство

Напомним, что $\quad |z|^2 = z \cdot \overline{z}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$

Используя эти формулы, получим:

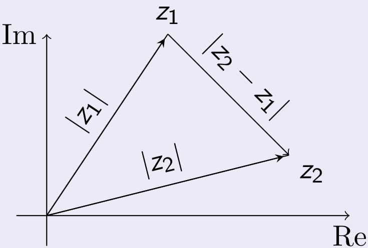
$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2|^2 &= (z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} = \\ &= (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = \\ &= (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) = \\ &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2. \end{aligned}$$

Извлекая корень из последнего равенства, получаем нужное.

Абсолютная величина комплексного числа

Геометрический смысл величины $|z_2 - z_1|$

Комплексное число $z_2 - z_1$ соответствует вектору с началом в z_1 и концом z_2. Величина $|z_2 - z_1|$ есть длина этого вектора, т. е. расстояние между точками z_1 и z_2:



Абсолютная величина комплексного числа

Пример

Найти модули комплексных чисел $(a, b \in \mathbb{R})$:

$$1)\ 3i; \quad 2)\ -2; \quad 3)\ 1+i; \quad 4)\ -2-5i; \quad 5)\ bi.$$

Абсолютная величина комплексного числа

Пример

Найти модули комплексных чисел ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$1)\ 3i;\quad 2)\ -2;\quad 3)\ 1+i;\quad 4)\ -2-5i;\quad 5)\ bi.$$

Решение

Напомним, что $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x+iy$.

1. $|3i| = \sqrt{0^2+3^2} = 3.$
2. $|-2| = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2.$
3. $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$
4. $|-2-5i| = \sqrt{(-2)^2+(-5)^2} = \sqrt{29}.$
5. $|bi| = \sqrt{0^2+b^2} = |b|.$

Содержание

Корень из комплексного числа

Определение квадратного корня из комплексного числа

Число w называется квадратным корнем из комплексного числа z, если его квадрат равен z:

$$w^2 = z$$

Корень из комплексного числа

Определение квадратного корня из комплексного числа

Число w называется квадратным корнем из комплексного числа z, если его квадрат равен z:

$$w^2 = z$$

Замечание о корне из комплексного числа

Если w - квадратный корень из числа z, то и $-w$ является квадратным корнем из z: из $w^2 = z$ следует $(-w)^2 = z$.

Корень из комплексного числа

Пример: вычислить $\sqrt{5 - 12i}$

Корень из комплексного числа

Пример: вычислить $\sqrt{5-12i}$

Запишем задачу в виде $w^2 = 5 - 12i$.
Будем искать корни в виде $w = u + vi$.

Корень из комплексного числа

Пример: вычислить $\sqrt{5-12i}$

Запишем задачу в виде $w^2 = 5 - 12i$.
Будем искать корни в виде $w = u + vi$.

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 5; \\ 2uv = -12. \end{cases}$$

Заметим, что $(u+vi)^2 = (u^2 - v^2) + 2uvi$.
Приравнивая действительные и мнимые части, получаем систему.

Корень из комплексного числа

Пример: вычислить $\sqrt{5-12i}$

Запишем задачу в виде $w^2 = 5 - 12i$.
Будем искать корни в виде $w = u + vi$.

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 5; \\ 2uv = -12. \end{cases} \implies u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = 169$$

Возведём оба уравнения в квадрат и сложим.

Корень из комплексного числа

Пример: вычислить $\sqrt{5-12i}$

Запишем задачу в виде $w^2 = 5 - 12i$.
Будем искать корни в виде $w = u + vi$.

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 5; \\ 2uv = -12. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = 169 \quad \Longrightarrow \quad u^2 + v^2 = 13.$$

Извлечем квадратный корень.

Корень из комплексного числа

Пример: вычислить $\sqrt{5 - 12i}$

Запишем задачу в виде $w^2 = 5 - 12i$.
Будем искать корни в виде $w = u + vi$.

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 5; \\ 2uv = -12. \end{cases} \implies u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = 169 \implies u^2 + v^2 = 13.$$

$$\begin{cases} u^2 = 9, \\ v^2 = 4. \end{cases}$$

Складывая и вычитая выделенные уравнения, получим систему.

Корень из комплексного числа

Пример: вычислить $\sqrt{5-12i}$

Запишем задачу в виде $w^2 = 5 - 12i$.
Будем искать корни в виде $w = u + vi$.

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 5; \\ 2uv = -12. \end{cases} \implies u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = 169 \implies u^2 + v^2 = 13.$$

$$\begin{cases} u^2 = 9, \\ v^2 = 4. \end{cases} \overset{uv<0}{\implies} w_1 = 3 - 2i,\ w_2 = -3 + 2i.$$

Учитывая, что $uv < 0$, приходим к ответу.

Корень из комплексного числа

Теорема (формула вычисления корня из комплексного числа)

Пусть $z = a + ib$ - отличное от нуля комплексное число. Тогда существуют два взаимно противоположных комплексных числа, квадраты которых равны z, а иных квадратных корней из z не существует. Если $b \neq 0$, то эти числа выражаются формулой:

$$w = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\,\mathrm{sign}\, b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$$

где $\mathrm{sign}\, b$ знак числа b.

Корень из комплексного числа

Теорема (формула вычисления корня из комплексного числа)

Пусть $z = a + ib$ - отличное от нуля комплексное число. Тогда существуют два взаимно противоположных комплексных числа, квадраты которых равны z, а иных квадратных корней из z не существует. Если $b \neq 0$, то эти числа выражаются формулой:

$$w = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\,\mathrm{sign}\,b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right]$$

где $\mathrm{sign}\,b$ знак числа b.

Следствие (корень из действительного числа)

При $b = 0$, $a > 0$ имеем: $w = \pm\sqrt{a}$, а при $b = 0$, $a < 0$ имеем: $w = \pm i\sqrt{|a|}$

Корень из комплексного числа

Пример

Задача: вычислить $\sqrt{3-4i}$

Решение: Положим $a = 3, b = -4$. Так как знак числа -4 отрицателен, то

$$\sqrt{3-4i} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}+3}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}-3}{2}}\right]$$
$$= \pm(2-i)$$

Литература I

Википедия, свободная энциклопедия.
http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number.

Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбуг С.И.
Алгебра и математический анализ 11 класс,
М.: «Просвещение», 1998.

Грудский С.М., Кряквин В.Д., Михалкович С.С.
Комплексные числа,
Ростов-на-Дону, 1997.

Дыбин В.Б.
Комплексные числа и многочлены,
Ростов-на-Дону, 1996.

Золотых Н.Ю.
Комплексные числа,
Н. Новгород, 2000.

Литература II

Кострикин А.И.
Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры.
М.: Физико-математическая литература, 2001.

Пекарскас В.В.
Геометрия комплексных чисел,
Квант, 1973, №6. С. 54-57.

Яглом И.М.
Комплексные числа и их применение в геометрии,
М.: Физматгиз, 1963.