Нахождение угла для точки на единичной окружности. Учебная презентация

А. В. Лихацкий

Руководитель: Е. А. Максименко

Южный федеральный университет

14 апреля 2008 г.

Содержание

Содержание

Формулировка задачи

Напомним, что аргументом комплексного числа $a + ib \neq 0$ называется угол φ, который удовлетворяет одновременно двум равенствам:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Следовательно, для того чтобы найти угол для точки $z = a + ib$ на единичной окружности, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \cos\varphi = a; \\ \sin\varphi = b. \end{cases} \qquad (a^2 + b^2 = 1) \qquad (1)$$

Разрешимость системы

Случай, когда система несовместна

Если $a^2 + b^2 \neq 1$ (точка (a, b) не лежит на единичной окружности), то система не имеет решений. Это следует из основного тригонометрического тождества:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \neq a^2 + b^2$$

Разрешимость системы

Случай, когда система несовместна

Если $a^2 + b^2 \neq 1$ (точка (a, b) не лежит на единичной окружности), то система не имеет решений. Это следует из основного тригонометрического тождества:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \neq a^2 + b^2$$

Замечание о бесконечности множества решений

Всюду далее будем считать, что $a^2 + b^2 = 1$. Углов, соответствующих системе (1), бесконечно много. Главным решением будем считать то, которое принадлежит промежутку $[0, 2\pi)$.

Запись ответа с помощью общих формул

Общая формула

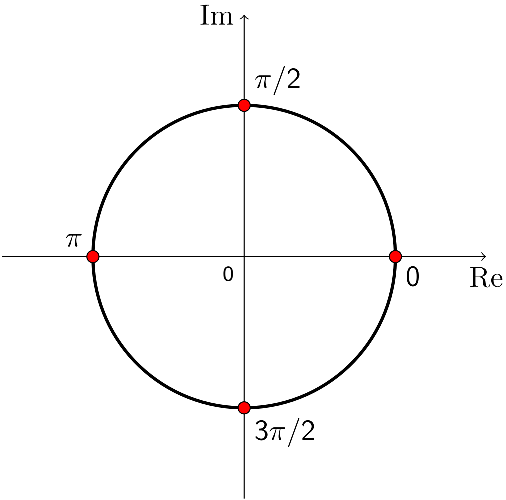
$$\varphi = \begin{cases} \arccos a + 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}), & a \geqslant 0; \\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}), & a < 0. \end{cases}$$

Замечание

В частных случаях лучше не использовать общую формулу, а представлять себе единичную окружность. Этому и посвящена оставшаяся часть презентации.

Содержание

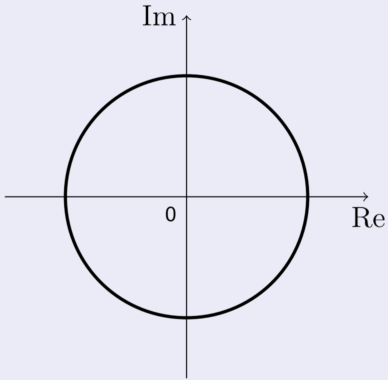
Окружность с углами, кратными прямому



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi &= 1; \\ \sin\varphi &= 0. \end{cases}$$

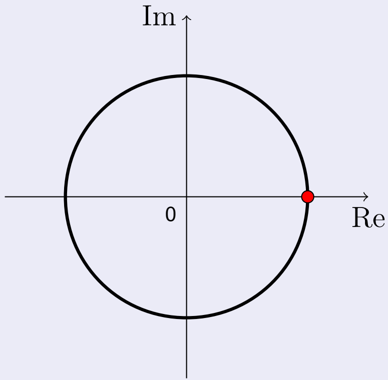
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = 1; \\ \sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Ответ

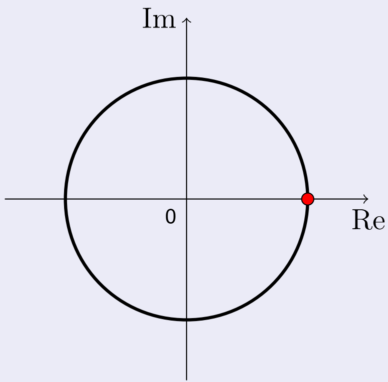


Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi &= 1; \\ \sin\varphi &= 0. \end{cases}$$

Ответ

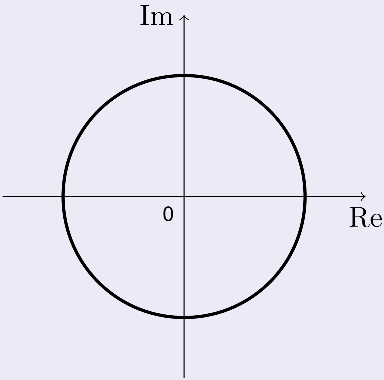
$$\varphi = 2\pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = 0; \\ \sin\varphi = 1. \end{cases}$$

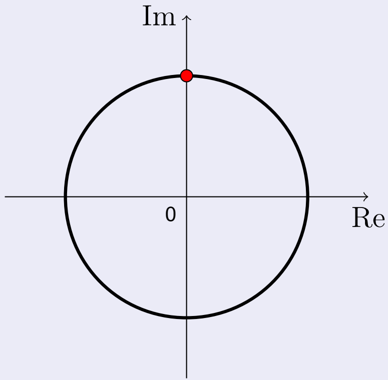
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = 0; \\ \sin\varphi = 1. \end{cases}$$

Ответ

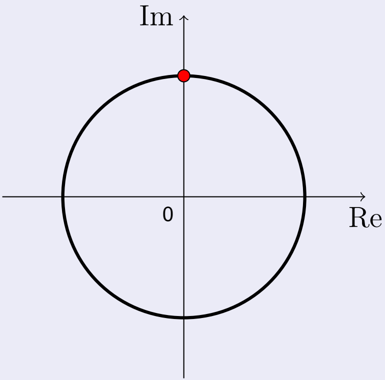


Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi &= 0; \\ \sin\varphi &= 1. \end{cases}$$

Ответ

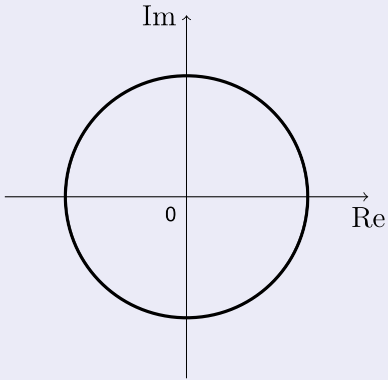
$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = -1; \\ \sin\varphi = 0. \end{cases}$$

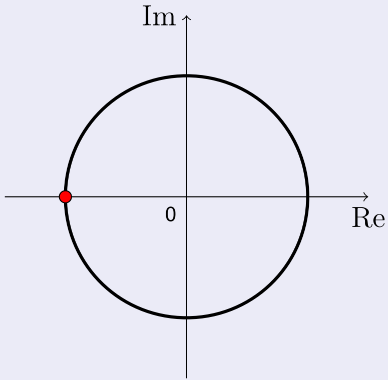
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = -1; \\ \sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Ответ

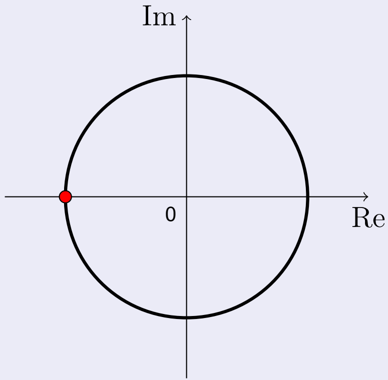


Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = -1; \\ \sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Ответ

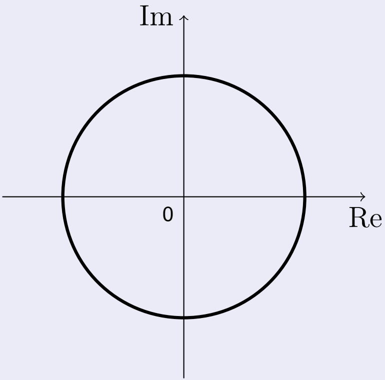
$$\varphi = \pi + 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = 0; \\ \sin\varphi = -1. \end{cases}$$

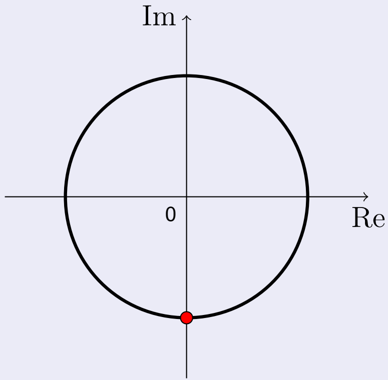
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi &= 0; \\ \sin\varphi &= -1. \end{cases}$$

Ответ

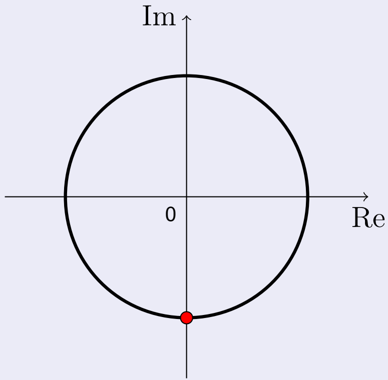


Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = 0; \\ \sin\varphi = -1. \end{cases}$$

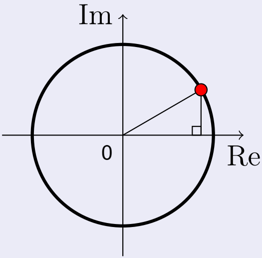
Ответ

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}$$



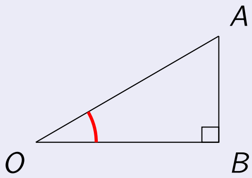
Содержание

Теорема: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$



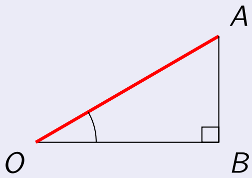
Нарисуем окружность единичного радиуса и отметим на ней угол $\pi/6$. Опустим на действительную ось перпендикуляр и рассмотрим получившийся треугольник отдельно.

Теорема: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$



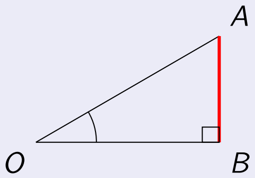
$\angle AOB = 30^\circ$,

Теорема: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$



$\angle AOB = 30^\circ, \quad OA = 1.$

Теорема: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$



$\angle AOB = 30^\circ, \quad OA = 1.$

Так как в прямоугольном треугольнике угол лежащий напротив угла в 30 градусов равен половине гипотенузы, то

$$\sin\frac{\pi}{6} = AB = \frac{OA}{2} = \frac{1}{2}$$

Следствие 1: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

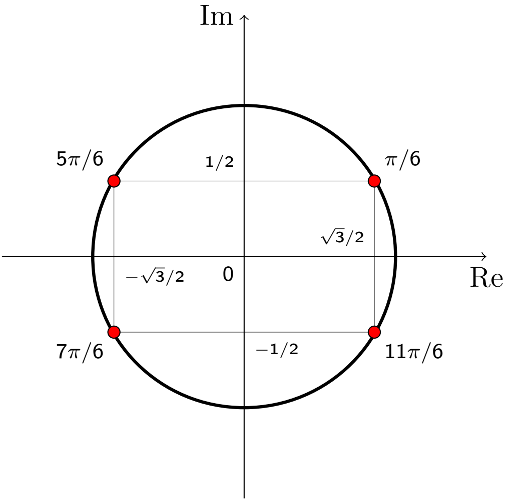
Следствие 1: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

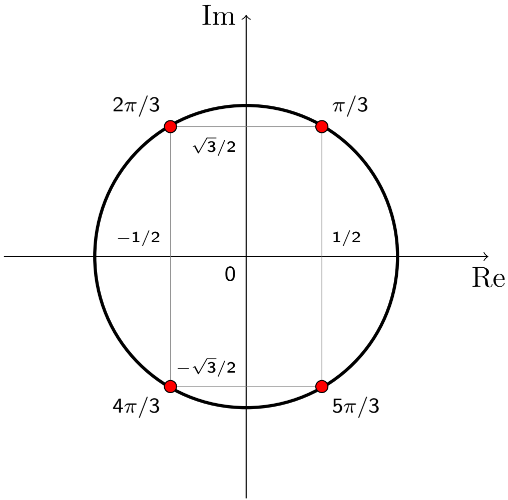
Следствие 2: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$
$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Окружность с углами, кратными $\frac{\pi}{6}$



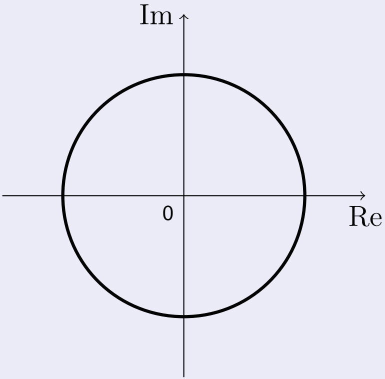
Окружность с углами, кратными $\frac{\pi}{6}$



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

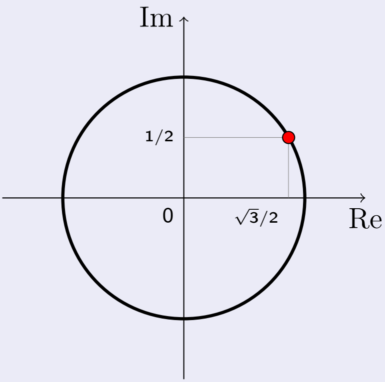
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ

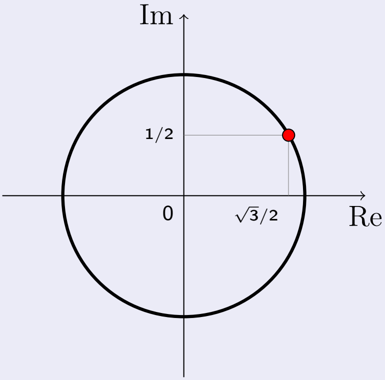


Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ

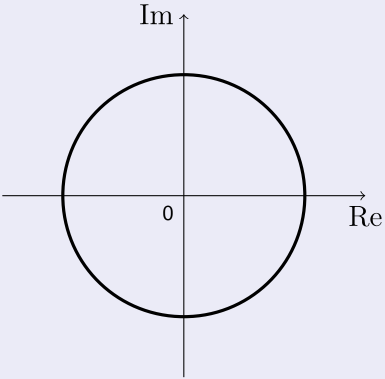
$$\varphi = \pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

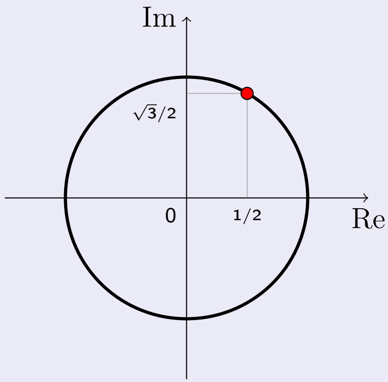
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ответ

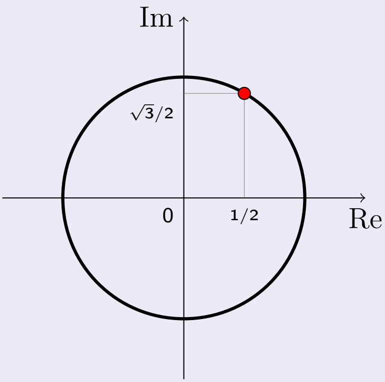


Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ответ

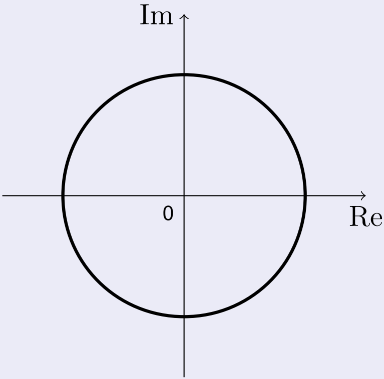
$$\varphi = \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & -\frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

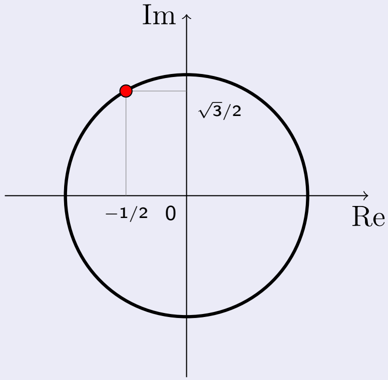
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & -\frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ответ

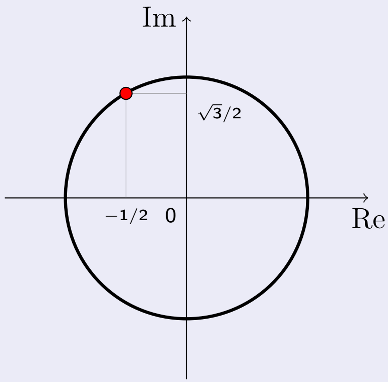


Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & -\frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ответ

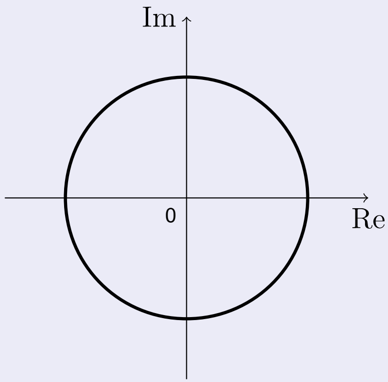
$$\varphi = 2\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

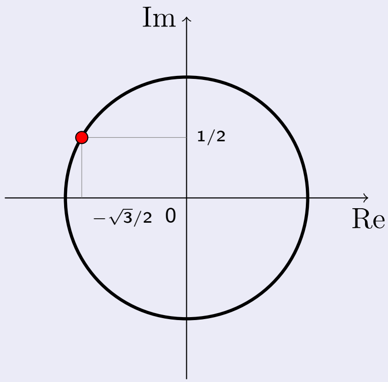
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) & = & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ

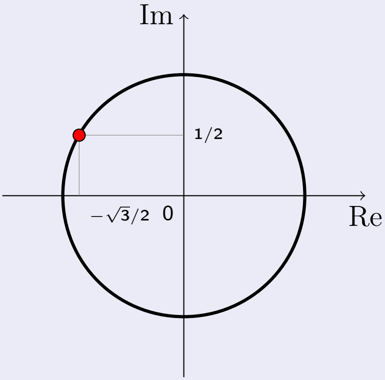


Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ

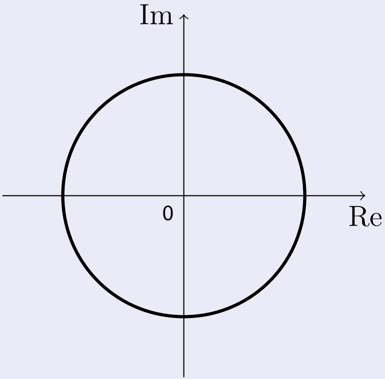
$$\varphi = 5\pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) & = & -\frac{1}{2} \end{cases}$$

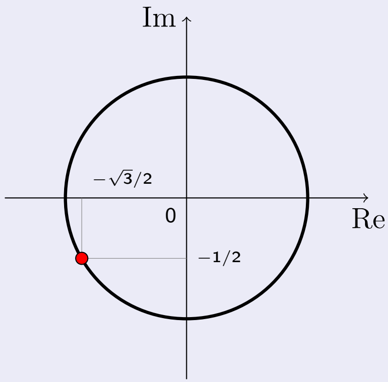
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) & = & -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ

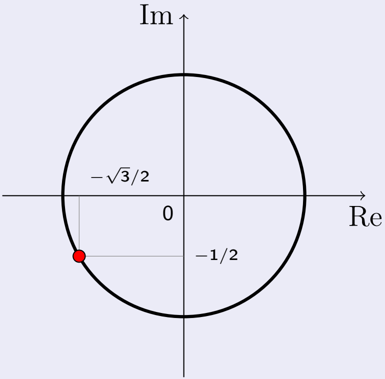


Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) & = & -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ

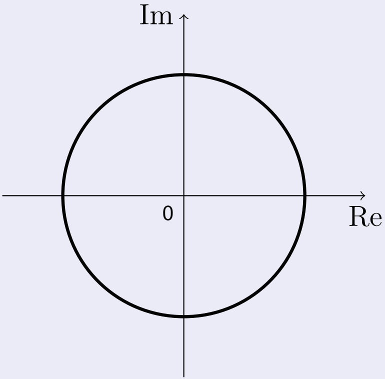
$$\varphi = 7\pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & -\frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

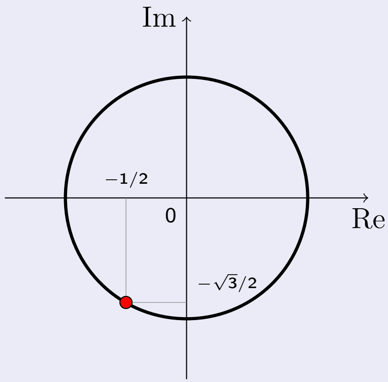
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & -\frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ответ

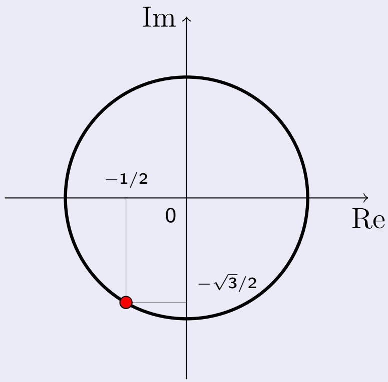


Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) &= -\frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ответ

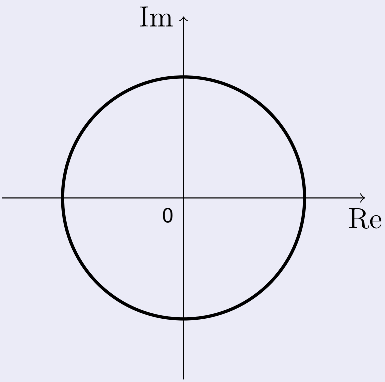
$$\varphi = 4\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

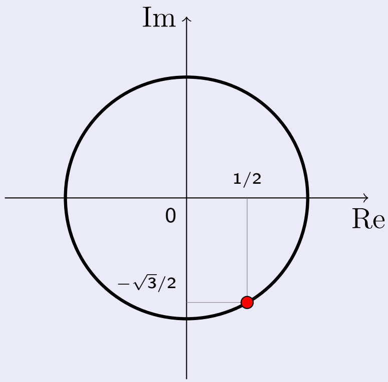
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ответ

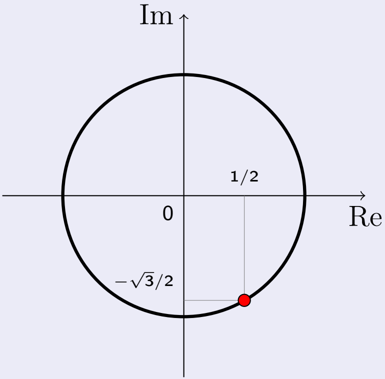


Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & \frac{1}{2} \\ \sin(\varphi) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ответ

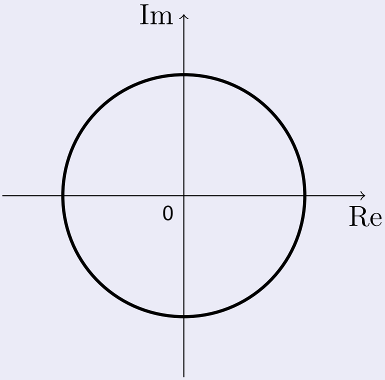
$$\varphi = 5\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) & = & -\frac{1}{2} \end{cases}$$

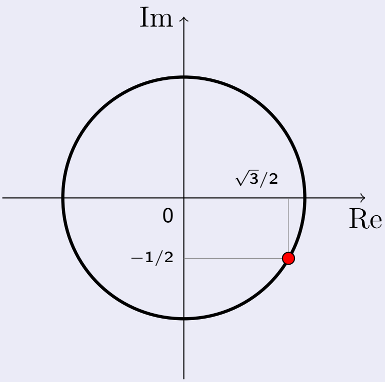
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) & = & -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ

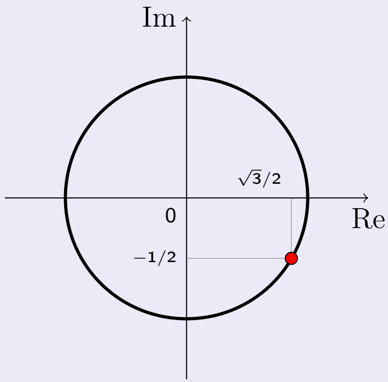


Пример

$$\begin{cases} \cos(\varphi) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\varphi) & = & -\frac{1}{2} \end{cases}$$

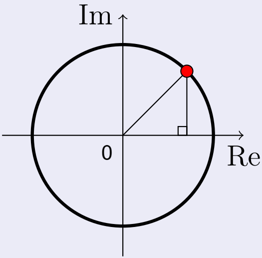
Ответ

$$\varphi = 11\pi/6 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



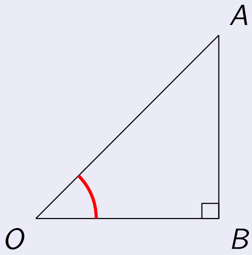
Содержание

Теорема: $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



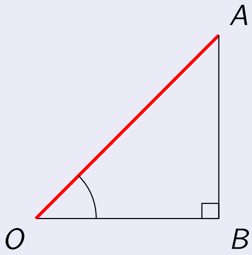
Нарисуем окружность единичного радиуса и отметим на ней угол $\pi/4$. Опустим на действительную ось перпендикуляр и рассмотрим получившийся треугольник отдельно.

Теорема: $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



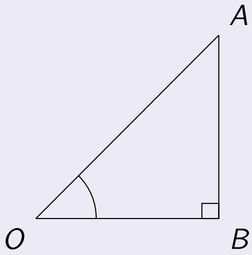
$\angle AOB = 45^\circ$,

Теорема: $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\angle AOB = 45^\circ, \quad OA = 1.$$

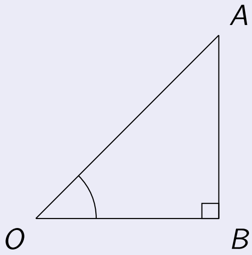
Теорема: $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\angle AOB = 45^\circ, \quad OA = 1.$

Заметим, что $\triangle AOB$ равнобедренный.

Теорема: $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



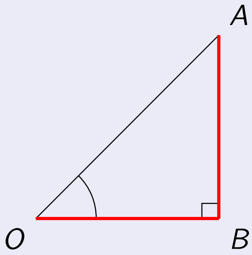
$\angle AOB = 45^\circ, \quad OA = 1.$

Заметим, что $\triangle AOB$ равнобедренный.

Тогда:

$$2AB^2 = OA^2 = 1.$$

Теорема: $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\angle AOB = 45^\circ, \quad OA = 1.$

Заметим, что $\triangle AOB$ равнобедренный.

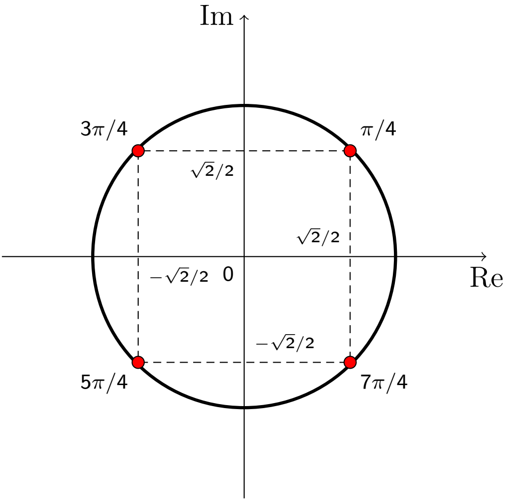
Тогда:

$$2AB^2 = OA^2 = 1.$$

Таким образом:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = AB = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

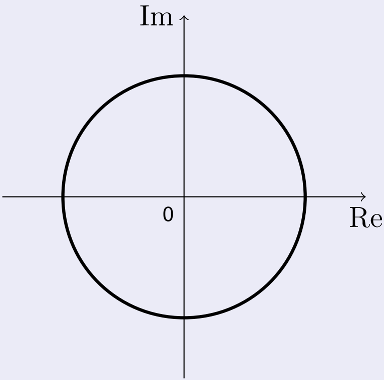
Окружность с углами, кратными $\pi/4$



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

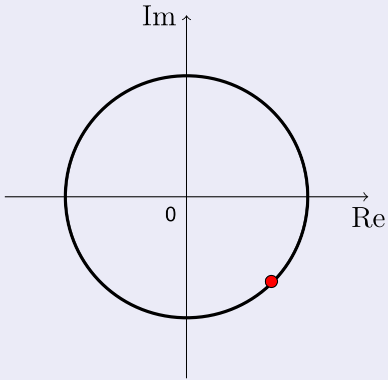
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ответ

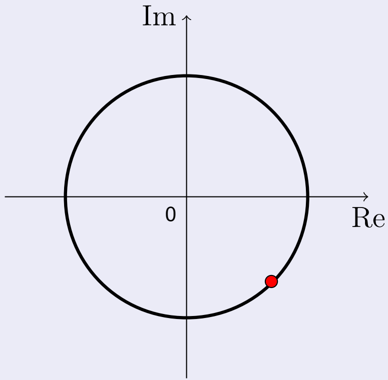


Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi &= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ответ

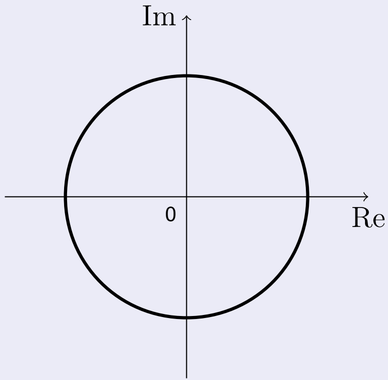
$$\varphi = 7\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

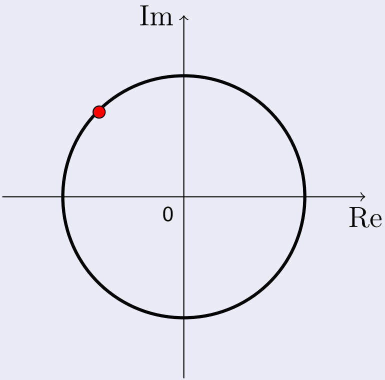
Ответ



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ответ

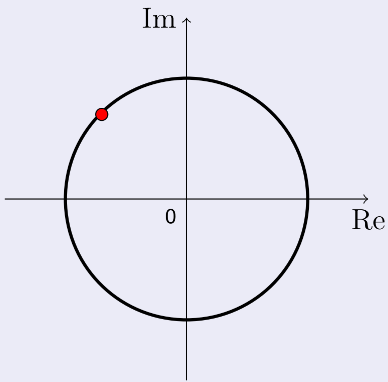


Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi &= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi &= \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ответ

$$\varphi = 3\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$



Содержание

Нужные свойства аркфункций

Область определения и действия аркфункций

$$\arcsin : [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$
$$\arccos : [-1; 1] \to [0; \pi];$$
$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Нужные свойства аркфункций

Область определения и действия аркфункций

$$\arcsin : [-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$
$$\arccos : [-1; 1] \to [0; \pi];$$
$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Значения аркфункций для положительного параметра

$$a \in [0; 1] \quad \Rightarrow \quad \arcsin a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \arccos a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$$
$$a \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arctg} a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение для первой четверти

Решение для первой четверти

Если $\cos\varphi = a$ и $\sin\varphi = b$, где $a > 0$ и $b > 0$, то решение можно записать в любой из следующих форм:

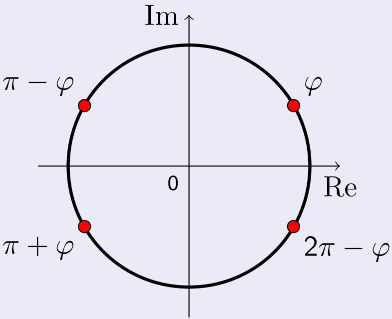
$$\varphi = \arccos a;$$

$$\varphi = \arcsin b;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

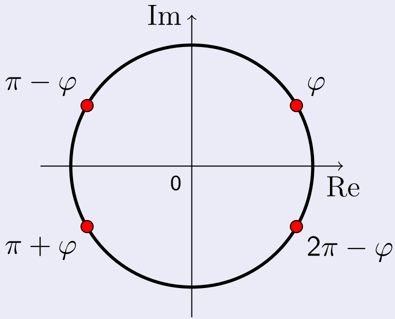
Общий случай сводить к первой четверти

Связь между углами в разных четвертях



Общий случай сводить к первой четверти

Связь между углами в разных четвертях

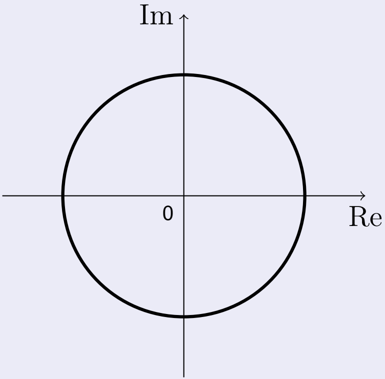


Общий случай решения

Если точка не лежит в первой четверти, то нужно отметить симметричную точку в первой четверти, решить систему для этой точки и, используя связь между углами в разных четвертях, получить ответ.

Пример

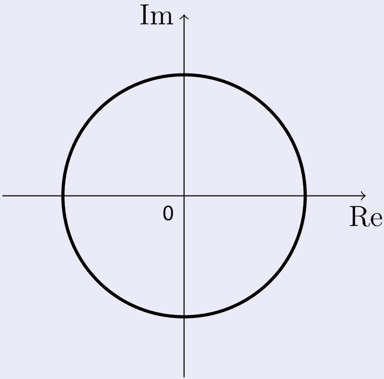
$$\begin{cases} \cos\varphi &= \frac{12}{13}; \\ \sin\varphi &= \frac{5}{13}. \end{cases}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \frac{12}{13}; \\ \sin\varphi &= \frac{5}{13}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

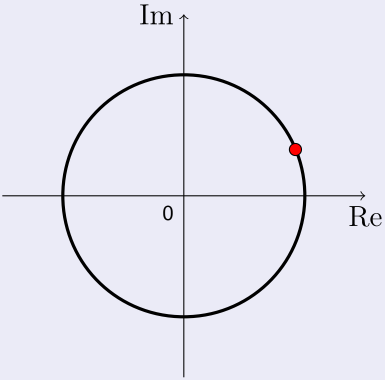


Проверим, что $a^2 + b^2 = 1$.

Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{12}{13}; \\ \sin\varphi = \frac{5}{13}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$



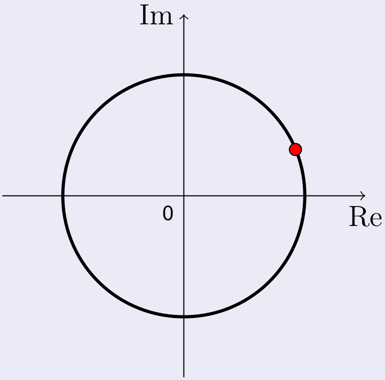
Отметим точку на окружности.

Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{12}{13}; \\ \sin\varphi = \frac{5}{13}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

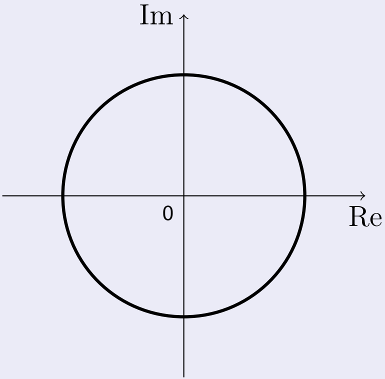
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$



Точка лежит в первой четверти, поэтому сразу получаем ответ.

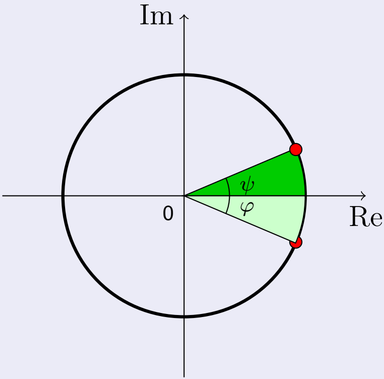
Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \frac{12}{13}; \\ \sin\varphi &= -\frac{5}{13}. \end{cases}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \frac{12}{13}; \\ \sin\varphi &= -\frac{5}{13}. \end{cases}$$

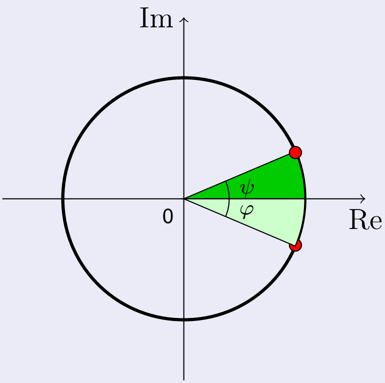


Отметим вспомогательную точку $\left(\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right)$.
Обозначим через ψ угол, который ей соответствует.

Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{12}{13}; \\ \sin\varphi = -\frac{5}{13}. \end{cases}$$

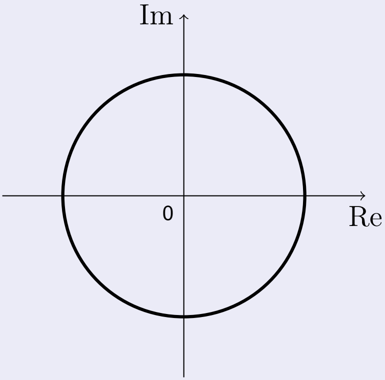
$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



Заметив, что $\varphi = -\psi$, получаем ответ.

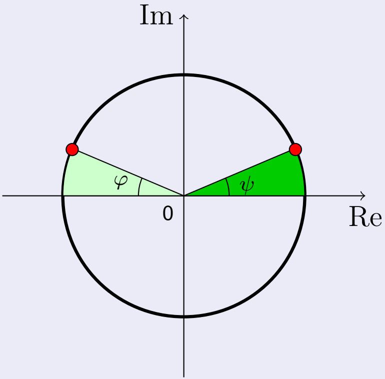
Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{12}{13}; \\ \sin\varphi = \frac{5}{13}. \end{cases}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi & = & -\frac{12}{13}; \\ \sin\varphi & = & \frac{5}{13}. \end{cases}$$

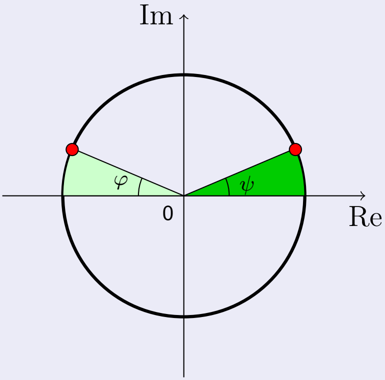


Отметим вспомогательную точку $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$.
Обозначим через ψ угол, который ей соответствует.

Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi &= -\frac{12}{13}; \\ \sin\varphi &= \frac{5}{13}. \end{cases}$$

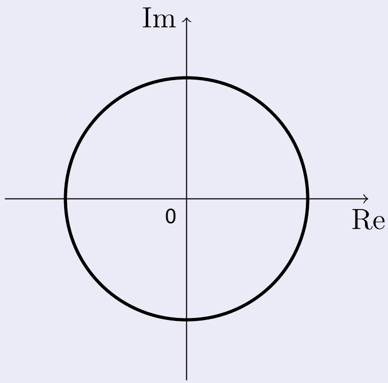
$$\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



Заметив, что $\varphi = \pi - \psi$, получаем ответ.

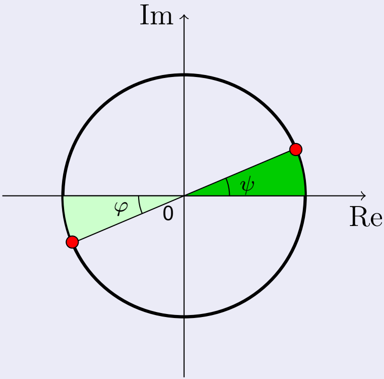
Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{12}{13}; \\ \sin\varphi = -\frac{5}{13}. \end{cases}$$



Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{12}{13}; \\ \sin\varphi = -\frac{5}{13}. \end{cases}$$

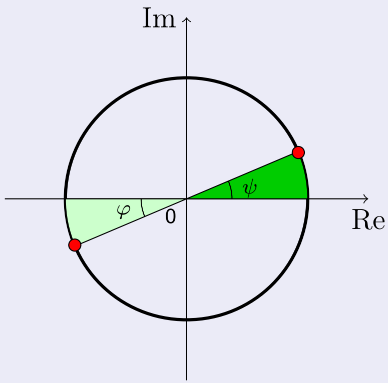


Отметим вспомогательную точку $(\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$.
Обозначим через ψ угол, который ей соответствует.

Пример

$$\begin{cases} \cos\varphi &= -\frac{12}{13}; \\ \sin\varphi &= -\frac{5}{13}. \end{cases}$$

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



Заметив, что $\varphi = \pi + \psi$, получаем ответ.

Литература I

Википедия, свободная энциклопедия.
http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number.

Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбуг С.И.
Алгебра и математический анализ 11 класс,
М.: «Просвещение», 1998.

Золотых Н.Ю.
Комплексные числа,
Н. Новгород, 2000.