Вычисление площади фигуры в полярных координатах

М. В. Лыткин

Руководитель: Е. А. Максименко

Южный федеральный университет

13 апреля 2008 г.

План

1. Постановка задачи и основная формула
    - Постановка задачи
    - Основная формула
    - Некоторые вспомогательные факты об интегралах и площадях
    - Доказательство основной формулы
    - Следствие из основной формулы
2. Примеры
    - Общее замечание
    - Двулистник
    - Четырёхлистник
    - Лемниската Бернулли
    - Кардиоида
    - Лист Декарта

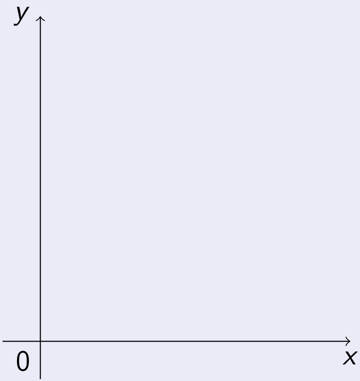
План

Постановка задачи

Пояснения

Пусть на плоскости задана полярная система координат. Совместим её с декартовой системой координат Oxy обычным образом, т. е. так, чтобы полярная ось совпала с положительной полуосью оси Ox, а направление отсчёта угла совпало с направлением кратчайшего поворота от Ox к Oy.

Построения

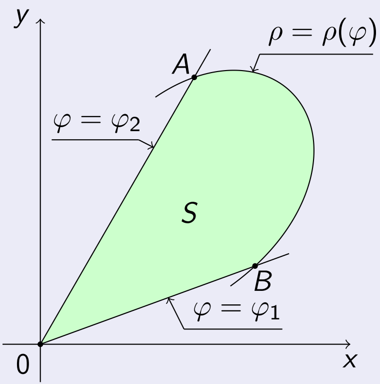


Постановка задачи

Пояснения

Часть плоскости, ограниченную лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, где $\varphi_1 \le \varphi_2$, и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где функция $\rho(\varphi)$ определена, непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$, будем называть *криволинейным сектором*.

Построения

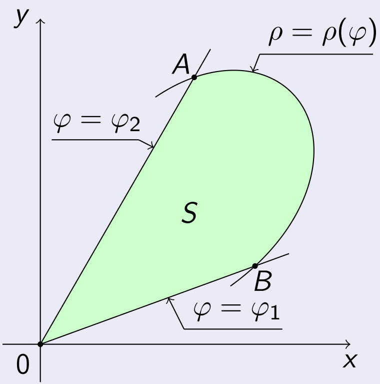


Постановка задачи

Пояснения

Этот криволинейный сектор состоит из точек вида (ρ, φ), где $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)$.

Построения

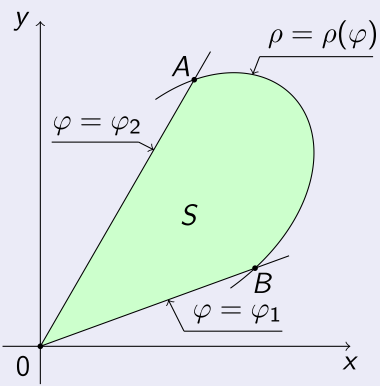


Постановка задачи

Пояснения

Задача состоит в нахождении площади S криволинейного сектора OAB.

Построения



План

Основная формула

Теорема

Пусть задан криволинейный сектор, ограниченный лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, где $\varphi_1 \leq \varphi_2$, и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где функция $\rho(\varphi)$ определена, непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$. Тогда площадь этого криволинейного сектора вычисляется по следующей формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

План

Вспомогательные факты о площадях

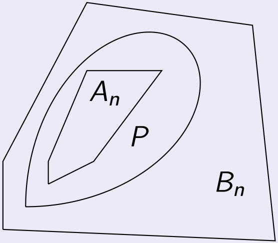
Приближение площади квадрируемыми фигурами

Пусть P – произвольная фигура на плоскости, представляющая собой ограниченную и замкнутую область.

Если существуют две последовательности квадрируемых фигур $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ соответственно, содержащихся в P и содержащих P, площади которых имеют общий предел

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = S,$$

то фигура P квадрируема и её площадь равна S.



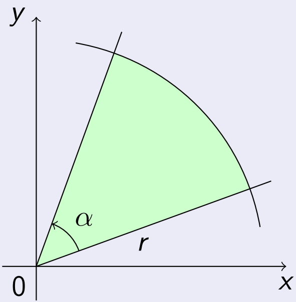
Вспомогательные факты о площадях

Площадь кругового сектора

Площадь S кругового сектора вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} r^2 \alpha,$$

где r – радиус сектора, α – раствор сектора в радианах.



Вспомогательные факты об интегралах

Разбиение отрезка

Разбиением τ отрезка $[a, b]$ называют набор точек τ_i, $i = 0, \ldots, n$ таких, что

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \tau_{i+1} < \ldots < \tau_n = b.$$

Вспомогательные факты об интегралах

Разбиение отрезка

Разбиением τ отрезка $[a, b]$ называют набор точек τ_i, $i = 0, \dots, n$ таких, что

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_i < \tau_{i+1} < \dots < \tau_n = b.$$

Диаметр разбиения

Введём обозначение: $\Delta\tau_i = (\tau_i - \tau_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$. Величину

$$\Delta\tau = \max_{i=1,\dots,n} \Delta\tau_i$$

называют *диаметром разбиения* τ.

Вспомогательные факты об интегралах

Определение сумм Дарбу

Пусть функция $f = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Введём ещё обозначения:

$$\mu_i(\tau) = \min_{x \in [\tau_i - \tau_{i-1}]} f(x) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$M_i(\tau) = \max_{x \in [\tau_i - \tau_{i-1}]} f(x) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Величины

$$\sigma(f, \tau) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\tau) \Delta\tau_i, \qquad \Sigma(f, \tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i(\tau) \Delta\tau_i$$

назовают соответственно *нижней* и *верхней* суммами Дарбу функции f по разбиению τ.

Вспомогательные факты об интегралах

Теорема о суммах Дарбу непрерывной функции

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{\Delta\tau\to 0} \sigma(f, \tau) = \lim_{\Delta\tau\to 0} \Sigma(f, \tau) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

План

1. Постановка задачи и основная формула
   - Постановка задачи
   - Основная формула
   - Некоторые вспомогательные факты об интегралах и площадях
   - Доказательство основной формулы
   - Следствие из основной формулы
2. Примеры
   - Общее замечание
   - Двулистник
   - Четырёхлистник
   - Лемниската Бернулли
   - Кардиоида
   - Лист Декарта

Доказательство основной формулы

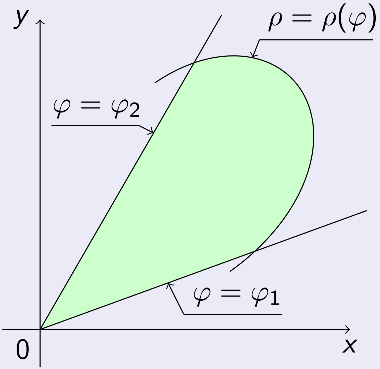
Доказательство

Для доказательства будем пользоваться фактами, утверждениями и определениями из предыдущего подраздела.

Доказательство основной формулы

Доказательство, шаг 1 из 7

Задан криволинейный сектор.



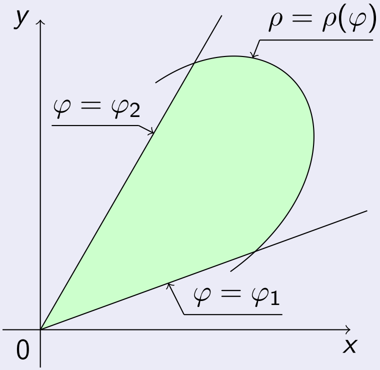
Доказательство основной формулы

Доказательство, шаг 1 из 7

Задан криволинейный сектор. Выберем произвольно разбиение τ отрезка $[\varphi_1, \varphi_2]$. Определим числа $\mu_i(\tau)$ и $M_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$, следующими формулами:

$$\mu_i(\tau) = \min_{\varphi \in [\tau_i - \tau_{i-1}]} \rho(\varphi),$$

$$M_i(\tau) = \max_{\varphi \in [\tau_i - \tau_{i-1}]} \rho(\varphi).$$



Доказательство основной формулы

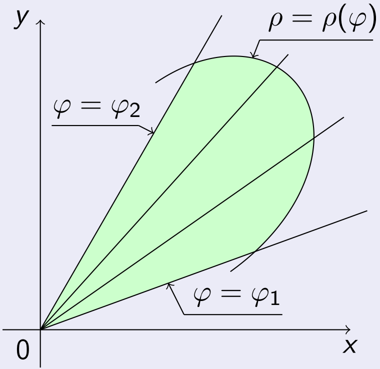
Доказательство, шаг 1 из 7

Задан криволинейный сектор.
Выберем произвольно разбиение τ отрезка $[\varphi_1, \varphi_2]$. Определим числа $\mu_i(\tau)$ и $M_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$, следующими формулами:

$$\mu_i(\tau) = \min_{\varphi \in [\tau_i - \tau_{i-1}]} \rho(\varphi),$$

$$M_i(\tau) = \max_{\varphi \in [\tau_i - \tau_{i-1}]} \rho(\varphi).$$

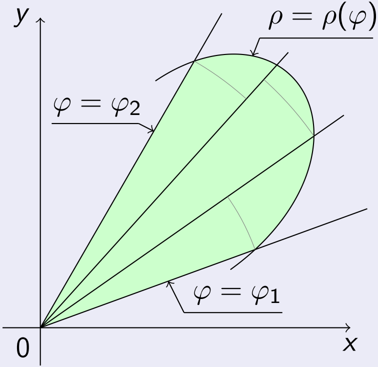
Проведём лучи $\varphi_i = \tau_i$, $i = 0, \ldots, n$.



Доказательство основной формулы

Доказательство, шаг 2 из 7

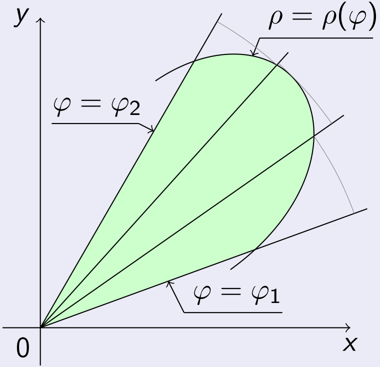
Обозначим через s_i круговой сектор радиуса $\mu_i(\tau)$, ограниченный лучами $\varphi = \tau_{i-1}$ и $\varphi = \tau_i$, $i = 1, \ldots, n$.



Доказательство основной формулы

Доказательство, шаг 3 из 7

А через S_i обозначим круговой сектор радиуса $M_i(\tau)$, ограниченный лучами $\varphi = \tau_{i-1}$ и $\varphi = \tau_i$, $i = 1, \dots, n$.

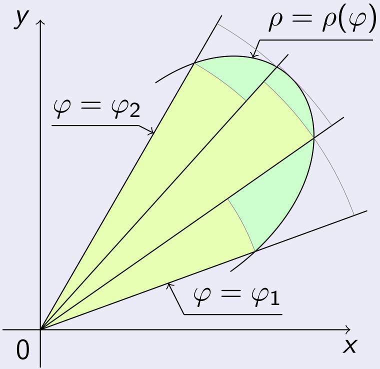


Доказательство основной формулы

Доказательство, шаг 4 из 7

Фигура, состоящая из секторов s_i, $i = 1, \dots, n$, содержится в исходном криволинейном секторе. Её площадь равна нижней сумме Дарбу функции $\frac{1}{2}\rho^2$ по разбиению τ:

$$\sigma\left(\frac{1}{2}\rho^2, \tau\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2(\tau)\Delta\tau.$$

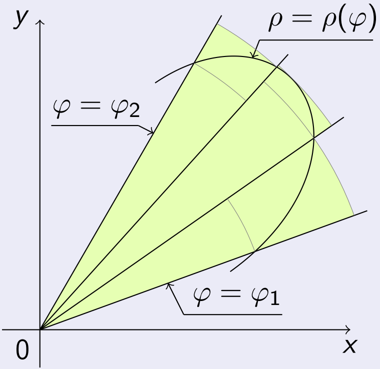


Доказательство основной формулы

Доказательство, шаг 5 из 7

Фигура, состоящая из секторов S_i, $i = 0, \ldots, n$, содержит исходный криволинейный сектор.
Её площадь равна верхней сумме Дарбу функции $\frac{1}{2}\rho^2$ по разбиению τ:

$$\Sigma\left(\frac{1}{2}\rho^2, \tau\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2(\tau)\Delta\tau.$$

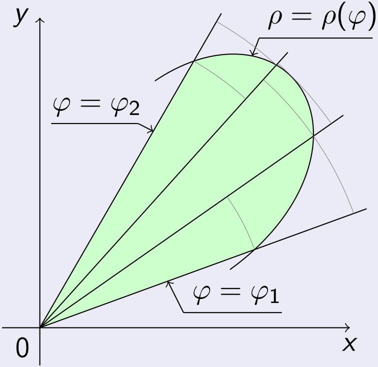


Доказательство основной формулы

Доказательство, шаг 6 из 7

Для площади S исходного криволинейного сектора получим неравенство

$$\sigma\left(\frac{1}{2}\rho^2, \tau\right) \le S \le \Sigma\left(\frac{1}{2}\rho^2, \tau\right).$$



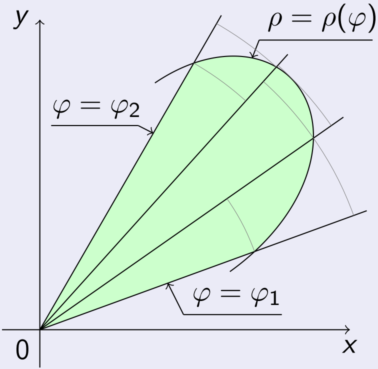
Доказательство основной формулы

Доказательство, шаг 7 из 7

Из теоремы о суммах Дарбу непрерывной функции получаем, что при $\Delta\tau \to 0$ обе суммы сходятся к интегралу

$$I = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Следовательно, $I \leq S \leq I$, т.е. $S = I$, что и требовалось доказать.



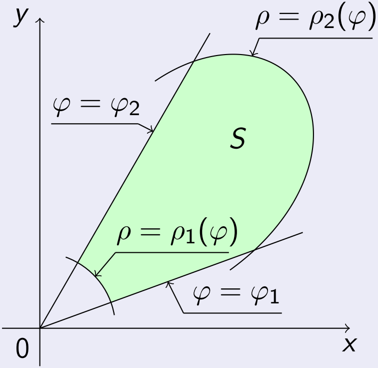
План

Следствие из основной формулы

Следствие

Пусть в полярной системе координат задана фигура, ограниченная лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$,где $\varphi_1 \le \varphi_2$ и кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$ для любого $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, тогда площадь S этой фигуры вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi))\, d\varphi.$$



План

Общее замечание

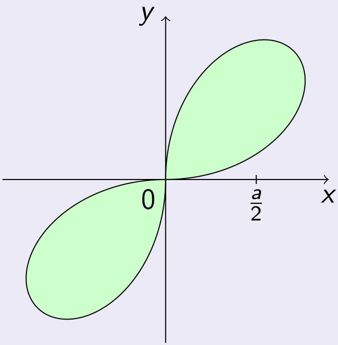
Замечание

Все примеры взяты из презентации «Построение кривой, заданной уравнением в полярной системе координат», поэтому здесь мы не будем подробно обсуждать построения и симметричность фигур, а будем только вычислять площади.

План

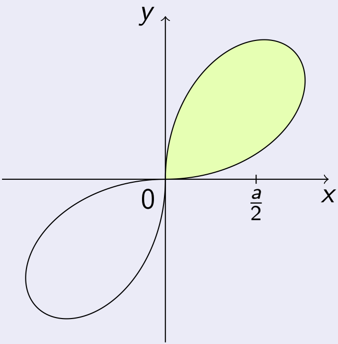
$\rho = a \sin 2\varphi,\ a > 0$ (двулистник)

Построим фигуру, ограниченную данной кривой.



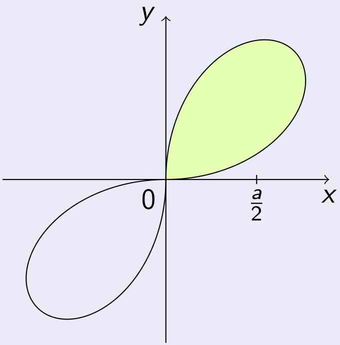
$\rho = a \sin 2\varphi$, $a > 0$ (двулистник)

Пользуясь свойством периодичности функции $a \sin 2\varphi$, вычислим площадь S_1 части фигуры в секторе $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, затем умножим её на 2 и получим площадь S всей фигуры.



$\rho = a \sin 2\varphi,\ a > 0$ (двулистник)

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin 2\varphi)^2\, d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\, d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi)\, d(4\varphi) =$$
$$= \frac{a^2}{16}(4\varphi - \sin 4\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi}{8}.$$



$\rho = a \sin 2\varphi,\ a > 0$ (двулистник)

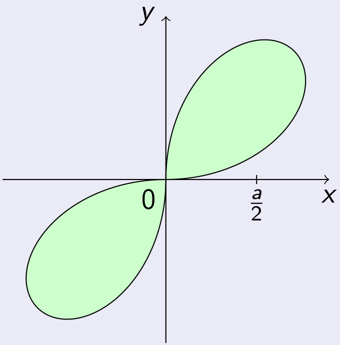
$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin 2\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi)\, d(4\varphi) =$$

$$= \frac{a^2}{16}(4\varphi - \sin 4\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi}{8}.$$

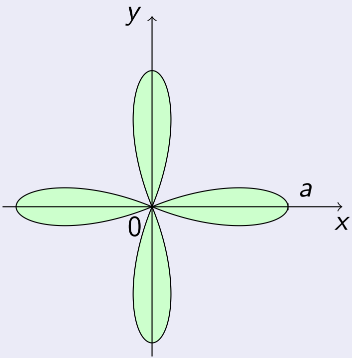


Итак, $S = 2S_1 = \dfrac{a^2\pi}{4}$.

План

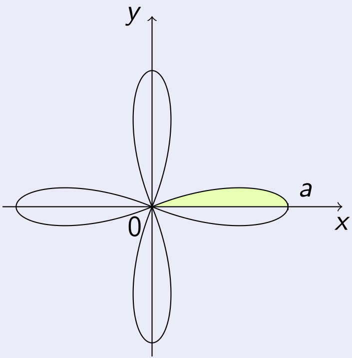
$\rho = a\cos 4\varphi,\ a > 0$ (четырёхлистник)

Построим фигуру, ограниченную данной кривой.



$\rho = a\cos 4\varphi,\ a > 0$ (четырёхлистник)

Пользуясь свойствами чётности и периодичности функции $a\cos 4\varphi$, вычислим площадь S_1 части фигуры в секторе $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8}$, затем умножим её на 8 и получим площадь S всей фигуры.



$\rho = a\cos 4\varphi$, $a > 0$ (четырёхлистник)

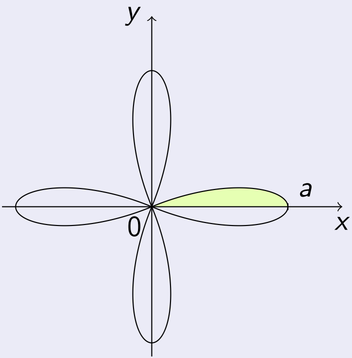
$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (a\cos 4\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 4\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1+\cos 8\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{32}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1+\cos 8\varphi)\, d(8\varphi) =$$

$$= \frac{a^2}{32}(8\varphi + \sin 8\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{a^2\pi}{32}.$$



$\rho = a\cos 4\varphi$, $a > 0$ (четырёхлистник)

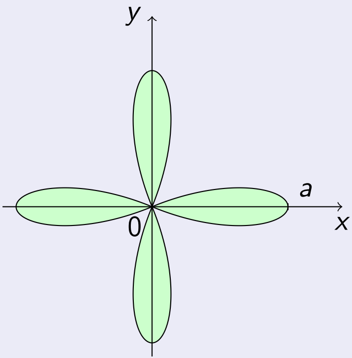
$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (a\cos 4\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 4\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1+\cos 8\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{32}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1+\cos 8\varphi)\, d(8\varphi) =$$

$$= \frac{a^2}{32}(8\varphi + \sin 8\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{a^2\pi}{32}.$$

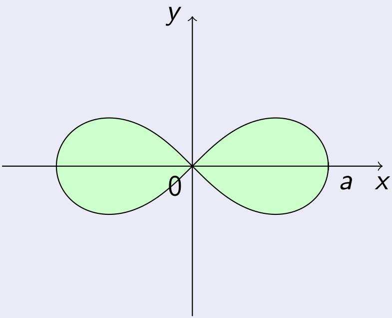


Итак, $S = 8S_1 = \dfrac{a^2\pi}{4}$.

План

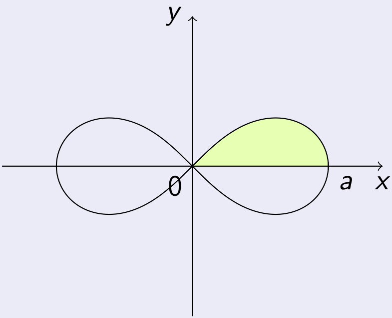
$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $a \neq 0$ (лемниската Бернулли)

Построим фигуру, ограниченную данной кривой.



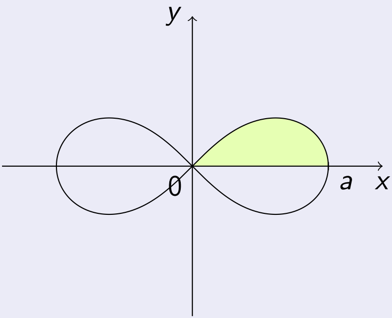
$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $a \neq 0$ (лемниската Бернулли)

Пользуясь свойствами чётности и периодичности функции $|a|\sqrt{\cos 2\varphi}$, вычислим площадь S_1 части фигуры в секторе $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, затем умножим её на 4 и получим площадь S всей фигуры.



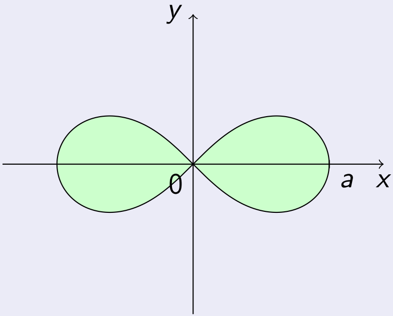
$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $a \neq 0$ (лемниската Бернулли)

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d(2\varphi) =$$
$$= \frac{a^2}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$



$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $a \neq 0$ (лемниската Бернулли)

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d(2\varphi) =$$
$$= \frac{a^2}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

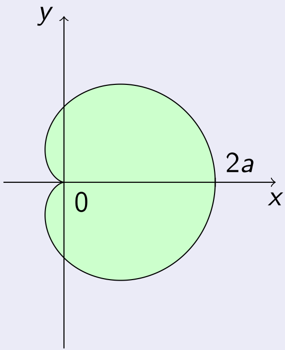


Итак, $S = 4S_1 = a^2$.

План

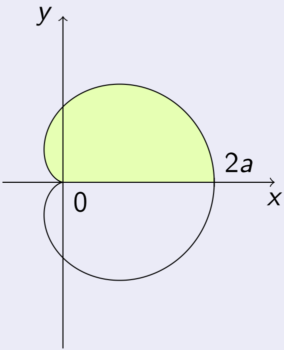
$\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$ (кардиоида)

Построим фигуру, ограниченную данной кривой.



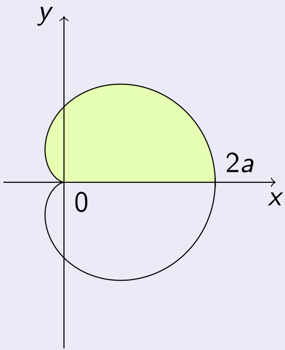
$\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$ (кардиоида)

Пользуясь свойством чётности $a(1+\cos\varphi)$, вычислим площадь S_1 части фигуры в верхней полуплоскости, затем умножим её на 2 и получим площадь S всей фигуры.



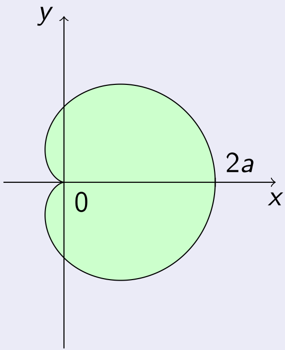
$\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$ (кардиоида)

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi = \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\,d\varphi = \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} = \\
&= \frac{3\pi a^2}{4}.
\end{aligned}
$$



$\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a > 0$ (кардиоида)

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\,d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$
$$= \frac{3\pi a^2}{4}.$$

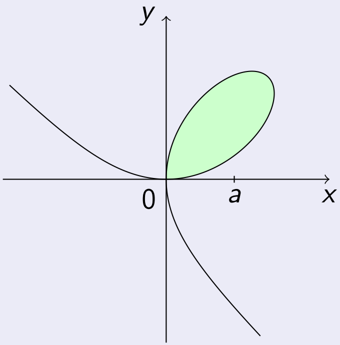


Итак, $S = 2S_1 = \dfrac{3\pi a^2}{2}.$

План

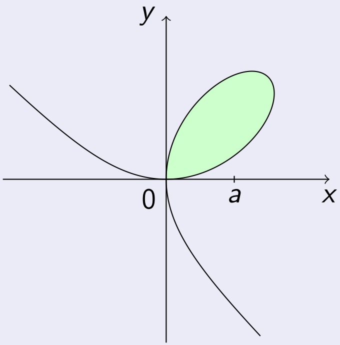
$\rho = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$, $a > 0$ (лист Декарта)

Построим фигуру, ограниченную данной кривой.



$\rho = \frac{3a \cos\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$, $a > 0$ (лист Декарта)

Будем вычислять площадь в секторе $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.



$\rho = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$, $a > 0$ (лист Декарта)

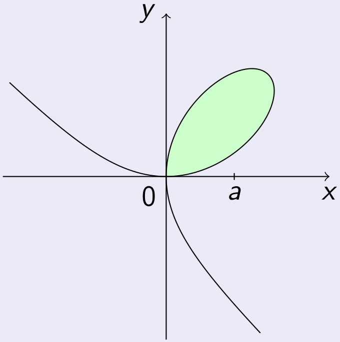
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}\,d(\operatorname{tg}\varphi) =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\varphi \\ 0 \to 0 \\ \frac{\pi}{2} \to \infty \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,dt =$$

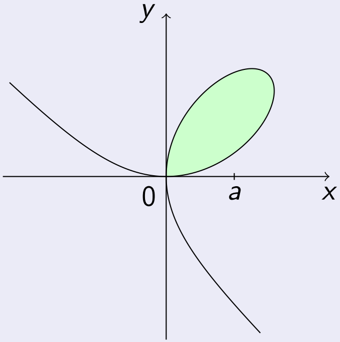


$\rho = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$, $a > 0$ (лист Декарта)

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{d(t^3)}{(1+t^3)^2} =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\infty}(1+t^3)^{-2}\,d(1+t^3) =$$

$$= -\frac{3a^2}{2}(1+t^3)^{-1}\Big|_0^{\infty} = \frac{3a^2}{2}.$$



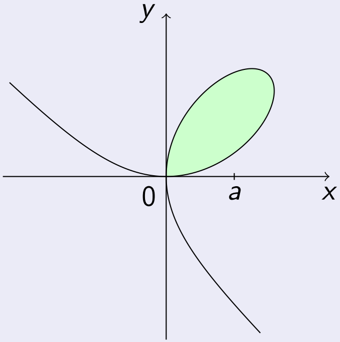
$\rho = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$, $a > 0$ (лист Декарта)

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\infty} \frac{d(t^3)}{(1+t^3)^2} =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\infty} (1+t^3)^{-2}\, d(1+t^3) =$$

$$= -\frac{3a^2}{2}(1+t^3)^{-1}\Big|_0^{\infty} = \frac{3a^2}{2}.$$

Итак, $S = \frac{3a^2}{2}$.



Источники

- Википедия, свободная энциклопедия. http://en.wikipedia.org и http://ru.wikipedia.org.
- Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: «ЧеРо», 1997.
- Ляшко И.И. и др. Справочное пособие по высшей математике. Т.1 — М.: «Едиторнал УРСС», 2001.
- Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 — М.: «ФМЛ», 2003.
- Лыткин М.В. Построение кривой, заданной уравнением в полярной системе координат. Учебная презентация.