

# Построение кривой, заданной уравнением в полярной системе координат

М. В. Лыткин

Руководитель: Е. А. Максименко

Южный федеральный университет

13 апреля 2008 г.

# План

- 1 Полярная система координат
  - Определение полярной системы координат
  - Построение точки в полярной системе координат
  - Связь полярной и декартовой систем координат
- 2 Некоторые свойства кривых, заданных в полярной системе координат
  - Область изменения угла
  - Чётность по углу
  - Периодичность по углу
- 3 Построение кривых в полярной системе координат
  - Алгоритм построения кривой
  - Примеры построения кривых

# План

- 1 Полярная система координат
  - Определение полярной системы координат
  - Построение точки в полярной системе координат
  - Связь полярной и декартовой систем координат
- 2 Некоторые свойства кривых, заданных в полярной системе координат
  - Область изменения угла
  - Чётность по углу
  - Периодичность по углу
- 3 Построение кривых в полярной системе координат
  - Алгоритм построения кривой
  - Примеры построения кривых

# Определение полярной системы координат

## Построения

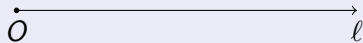
$\dot{O}$

## Пояснения

Возьмём на плоскости точку  $O$ .  
Эту точку будем называть  
*полюсом*.

# Определение полярной системы координат

## Построения



## Пояснения

Проведём из точки  $O$  луч  $\ell$ , который будем называть *полярной осью*.

# Определение полярной системы координат

## Построения



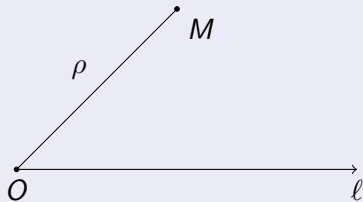
$M$

## Пояснения

Пусть на плоскости дана точка  $M$ .

# Определение полярной системы координат

## Построения

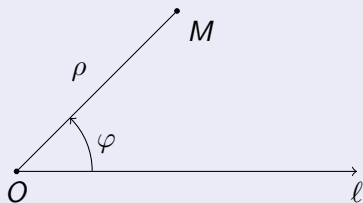


## Пояснения

Соединим точки  $O$  и  $M$  отрезком. Длину отрезка  $OM$  обозначим через  $\rho$  и будем называть *полярным радиусом*.

# Определение полярной системы координат

## Построения



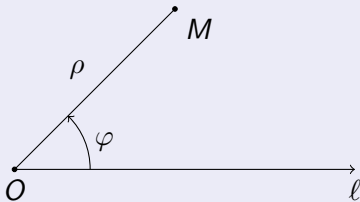
## Пояснения

Угол  $\varphi$  называется *полярным углом* (отсчитывается от полярной оси, против хода часовой стрелки и берётся со знаком «+»).



# Определение полярной системы координат

## Построения



## Вывод

Каждой точке плоскости мы поставили в соответствие пару чисел  $(\rho, \varphi)$ , а значит ввели систему координат на плоскости, которую будем называть *полярной*. Пару  $(\rho, \varphi)$  будем называть *полярными координатами* точки  $M$ .

# Определение полярной системы координат

## Замечание 1

Полярный угол  $\varphi$  можно отсчитывать по ходу часовой стрелки, но тогда он берётся со знаком «—».

# Определение полярной системы координат

## Замечание 1

Полярный угол  $\varphi$  можно отсчитывать по ходу часовой стрелки, но тогда он берётся со знаком «—».

## Замечание 2

Любая точка, кроме полюса, в полярной системе координат имеет бесконечно много координат вида  $(\rho, \varphi + 2\pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

# Определение полярной системы координат

## Замечание 1

Полярный угол  $\varphi$  можно отсчитывать по ходу часовой стрелки, но тогда он берётся со знаком «—».

## Замечание 2

Любая точка, кроме полюса, в полярной системе координат имеет бесконечно много координат вида  $(\rho, \varphi + 2\pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## Замечание 3

Для полюса  $\rho = 0$ , а угол  $\varphi$  не определён.

# Определение полярной системы координат

## Замечание 1

Полярный угол  $\varphi$  можно отсчитывать по ходу часовой стрелки, но тогда он берётся со знаком «—».

## Замечание 2

Любая точка, кроме полюса, в полярной системе координат имеет бесконечно много координат вида  $(\rho, \varphi + 2\pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## Замечание 3

Для полюса  $\rho = 0$ , а угол  $\varphi$  не определён.

## Замечание 4

Кривую в полярной системе координат можно задать уравнением вида  $\rho = \rho(\varphi)$ , где  $\varphi : \rho(\varphi) \geq 0$ .

# План

- 1 Полярная система координат
  - Определение полярной системы координат
  - **Построение точки в полярной системе координат**
  - Связь полярной и декартовой систем координат
- 2 Некоторые свойства кривых, заданных в полярной системе координат
  - Область изменения угла
  - Чётность по углу
  - Периодичность по углу
- 3 Построение кривых в полярной системе координат
  - Алгоритм построения кривой
  - Примеры построения кривых

# Построение точки в полярной системе координат

## Построения



## Пояснения

На плоскости задана полярная система координат.

# Построение точки в полярной системе координат

## Построения



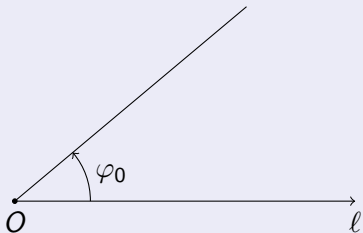
## Пояснения

Даны полярные координаты  $(\rho_0, \varphi_0)$  некоторой точки  $M$ . Построим эту точку.



# Построение точки в полярной системе координат

## Построения

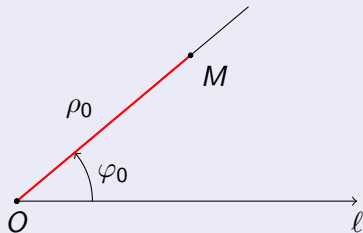


## Пояснения

Из полюса проведём луч так, что угол между полярной осью и этим лучом, откладываемый против часовой стрелки, имеет радианную меру  $\varphi_0$ .

# Построение точки в полярной системе координат

## Построения

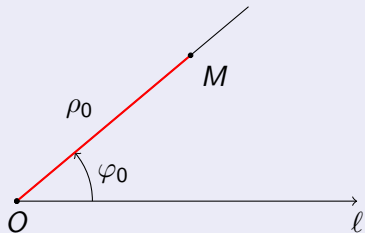


## Пояснения

На построенном луче от полюса отложим отрезок  $OM$  длины  $\rho_0$ .

# Построение точки в полярной системе координат

## Построения



## Пояснения

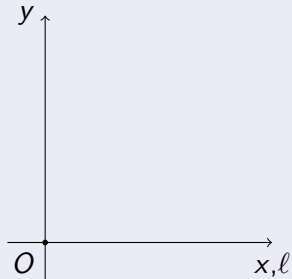
Мы построили искомую точку  $M$ .

# План

- 1 Полярная система координат
  - Определение полярной системы координат
  - Построение точки в полярной системе координат
  - **Связь полярной и декартовой систем координат**
- 2 Некоторые свойства кривых, заданных в полярной системе координат
  - Область изменения угла
  - Чётность по углу
  - Периодичность по углу
- 3 Построение кривых в полярной системе координат
  - Алгоритм построения кривой
  - Примеры построения кривых

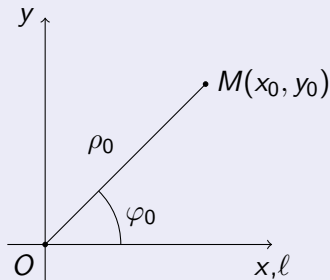
## Связь полярной и декартовой систем координат

Совместим полярную систему координат с правой прямоугольной декартовой так, что бы полюс полярной системы координат совпал с начальной точкой в правой прямоугольной декартовой, а полярная ось совпала с положительной полуосью оси абсцисс.



## Связь полярной и декартовой систем координат

Выберем произвольную точку  $M$  на плоскости. И пусть в полярной системе координат она имеет координаты  $(\rho_0, \varphi_0)$ , а в правой прямоугольной декартовой  $(x_0, y_0)$ .



## Связь полярной и декартовой систем координат

Из определения косинуса и синуса следуют формулы перехода от полярной системы координат к правой прямоугольной декартовой:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Несложно вывести обратные формулы:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\pi k, & y \geq 0, k \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 \neq 0 \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\pi k, & y < 0, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases} .$$

## Связь полярной и декартовой систем координат

Из определения косинуса и синуса следуют формулы перехода от полярной системы координат к правой прямоугольной декартовой:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Несложно вывести обратные формулы:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\pi k, y \geq 0, k \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 \neq 0 \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2\pi k, y < 0, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}.$$

### Замечание

Далее вместо полярной системы координат будем рисовать правую прямоугольную декартову.



# План

- 1 Полярная система координат
  - Определение полярной системы координат
  - Построение точки в полярной системе координат
  - Связь полярной и декартовой систем координат
- 2 Некоторые свойства кривых, заданных в полярной системе координат
  - **Область изменения угла**
  - Чётность по углу
  - Периодичность по углу
- 3 Построение кривых в полярной системе координат
  - Алгоритм построения кривой
  - Примеры построения кривых

## Область изменения $\varphi$

Пусть задано уравнение некоторой кривой  $\rho = \rho(\varphi)$ . Неравенство  $\rho < 0$  невозможно (это следует из определения полярной системы координат). Область изменения  $\varphi$  находим из неравенства  $\rho(\varphi) \geq 0$ .

## Область изменения $\varphi$

Пусть задано уравнение некоторой кривой  $\rho = \rho(\varphi)$ . Неравенство  $\rho < 0$  невозможно (это следует из определения полярной системы координат). Область изменения  $\varphi$  находим из неравенства  $\rho(\varphi) \geq 0$ .

**Пример:**  $\rho = \cos \varphi$

**Дано:** Уравнение некоторой кривой:  $\rho = \cos \varphi$ .

**Найти:** Область изменения  $\varphi$ .

**Решение:** Находим  $\varphi$  из неравенства  $\cos \varphi \geq 0$ .

**Ответ:**  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Область изменения $\varphi$

Пример:  $\rho = \cos^2 \varphi$

Дано: Уравнение некоторой кривой:  $\rho = \cos^2 \varphi$ .

Найти: Область изменения  $\varphi$ .

Решение: Находим  $\varphi$  из неравенства  $\cos^2 \varphi \geq 0$ .

Ответ:  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

## Область изменения $\varphi$

Пример:  $\rho = \cos^2 \varphi$

Дано: Уравнение некоторой кривой:  $\rho = \cos^2 \varphi$ .

Найти: Область изменения  $\varphi$ .

Решение: Находим  $\varphi$  из неравенства  $\cos^2 \varphi \geq 0$ .

Ответ:  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

Пример:  $\rho = \sin \varphi \cos^2 \varphi$

Дано: Уравнение некоторой кривой:  $\rho = \sin \varphi \cos^2 \varphi$ .

Найти: Область изменения  $\varphi$ .

Решение: Находим  $\varphi$  из неравенства  $\sin \varphi \cos^2 \varphi \geq 0$ .

1.)  $\sin \varphi \geq 0$ .

2.)  $\cos \varphi = 0$ .

Ответ:  $\varphi \in [2\pi k, \pi + 2\pi k] \cup \{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

# План

- 1 Полярная система координат
  - Определение полярной системы координат
  - Построение точки в полярной системе координат
  - Связь полярной и декартовой систем координат
- 2 Некоторые свойства кривых, заданных в полярной системе координат
  - Область изменения угла
  - Чётность по углу
  - Периодичность по углу
- 3 Построение кривых в полярной системе координат
  - Алгоритм построения кривой
  - Примеры построения кривых

## Чётность по $\varphi$

Рассмотрим кривую, заданную уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$ . Предположим, что функция  $\rho(\varphi)$  не является нечётной, т. е. её область определения симметрична относительно нуля и для любого  $\varphi$  из области определения выполняется равенство  $\rho(\varphi) = \rho(-\varphi)$ .

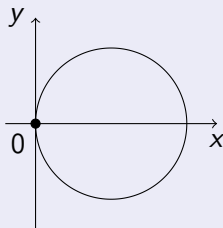
Тогда для любой точки  $(\rho_0, \varphi_0)$ , принадлежащей данной кривой, точка  $(\rho_0, -\varphi_0)$  также принадлежит этой кривой.

Следовательно, эта кривая симметрична относительно прямой, содержащей полярную ось.

## Чётность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \cos \varphi$

Пусть задана кривая уравнением  $\rho = \cos \varphi$ . На плоскости эта кривая будет выглядеть так:



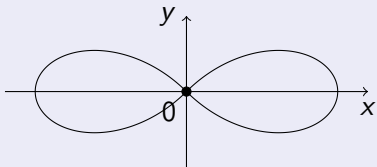
Действительно, кривая симметрична относительно полярной оси.



## Чётность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \cos 2\varphi$

Пусть задана кривая уравнением  $\rho = \cos 2\varphi$ . На плоскости эта кривая будет выглядеть так:

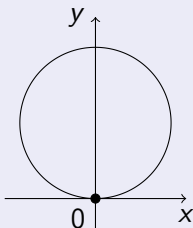


Действительно, кривая симметрична относительно полярной оси.

## Чётность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \sin \varphi$

Пусть задана кривая уравнением  $\rho = \sin \varphi$ . На плоскости эта кривая будет выглядеть так:



Функция  $\sin \varphi$  нечётная, и кривая не симметрична относительно полярной оси.

# План

- 1 Полярная система координат
  - Определение полярной системы координат
  - Построение точки в полярной системе координат
  - Связь полярной и декартовой систем координат
- 2 Некоторые свойства кривых, заданных в полярной системе координат
  - Область изменения угла
  - Чётность по углу
  - Периодичность по углу
- 3 Построение кривых в полярной системе координат
  - Алгоритм построения кривой
  - Примеры построения кривых

# Периодичность по $\varphi$

## Теорема

Пусть задана кривая уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$  и функция  $\rho(\varphi)$  является  $\frac{2\pi}{k}$  – периодической по  $\varphi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Проведём из полюса  $k$  лучей так, чтобы углы между соседними лучами были равны.

Тогда часть кривой, попавшей в один из полученных секторов, совпадёт с частью кривой, попавшей в соседний сектор, при повороте вокруг полюса на угол  $\frac{2\pi}{k}$ .

# Периодичность по $\varphi$

## Теорема

Пусть задана кривая уравнением  $\rho = \rho(\varphi)$  и функция  $\rho(\varphi)$  является  $\frac{2\pi}{k}$  – периодической по  $\varphi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Проведём из полюса  $k$  лучей так, чтобы углы между соседними лучами были равны.

Тогда часть кривой, попавшей в один из полученных секторов, совпадёт с частью кривой, попавшей в соседний сектор, при повороте вокруг полюса на угол  $\frac{2\pi}{k}$ .

## Доказательство

Утверждение теоремы следует из  $\frac{2\pi}{k}$  – периодичности функции  $\rho(\varphi)$ . Действительно, пусть некоторая точка  $(\rho_0, \varphi_0)$  принадлежит кривой, тогда точки вида  $(\rho_0, \varphi_0 + \frac{2\pi}{k}n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  также принадлежат кривой.

## Периодичность по $\varphi$

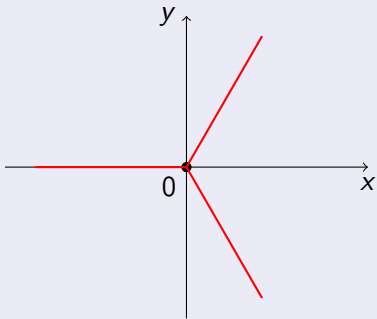
Пример:  $\rho = \cos 3\varphi$

Построим кривую, заданную уравнением  $\rho = \cos 3\varphi$ .

## Периодичность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \cos 3\varphi$

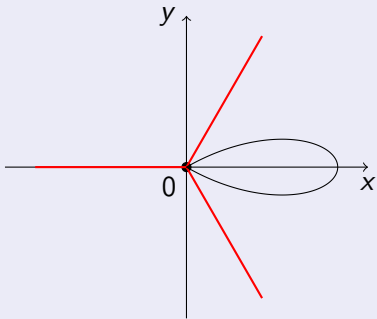
Функция  $\cos 3\varphi$  является  $\frac{2\pi}{3}$  – периодической. Проведем из полюса три луча:  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ .



## Периодичность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \cos 3\varphi$

Построим по точкам часть кривой в секторе  $-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ .

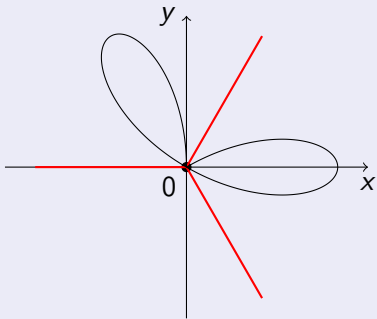




## Периодичность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \cos 3\varphi$

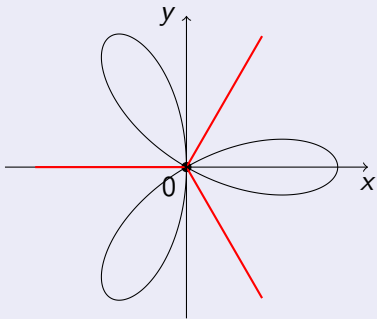
Теперь поворотом вокруг полюса на  $\frac{2\pi}{3}$  построим часть кривой в секторе  $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$ .



## Периодичность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \cos 3\varphi$

И поворотом вокруг полюса на  $\frac{4\pi}{3}$  построим часть кривой в секторе  $\pi \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$ .



## Периодичность по $\varphi$

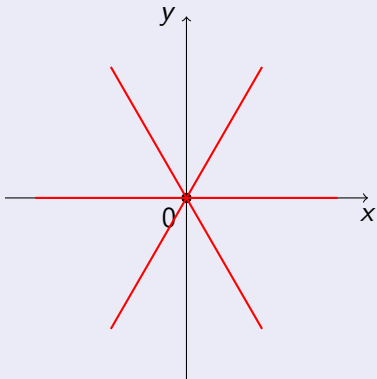
Пример:  $\rho = \sin(6\varphi - \frac{\pi}{2})$

Построим кривую, заданную уравнением  $\rho = \sin(6\varphi - \frac{\pi}{2})$ .

## Периодичность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \sin(6\varphi - \frac{\pi}{2})$

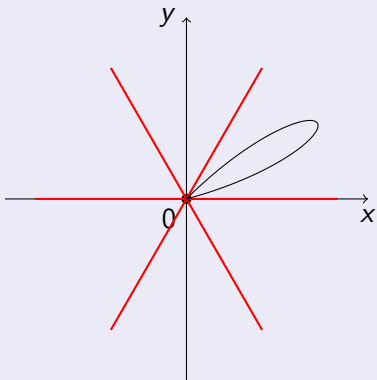
Функция  $\sin(6\varphi - \frac{\pi}{2})$  является  $\frac{\pi}{3}$  – периодической. Проведем из полюса шесть лучей:  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ,  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\varphi = \pi$ ,  $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ ,  $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ .



## Периодичность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \sin(6\varphi - \frac{\pi}{2})$

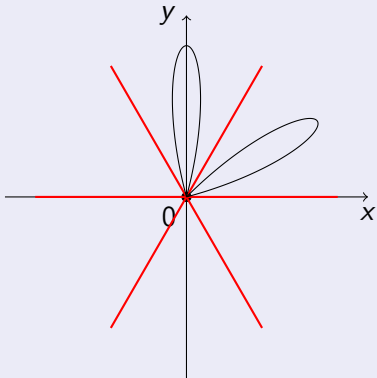
Построим по точкам часть кривой в секторе  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ .



## Периодичность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \sin(6\varphi - \frac{\pi}{2})$

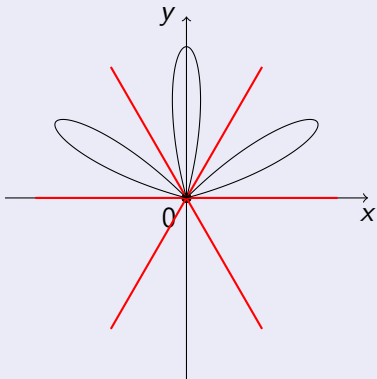
Теперь поворотом вокруг полюса на  $\frac{\pi}{3}$  построим часть кривой в секторе  $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$ .



## Периодичность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \sin(6\varphi - \frac{\pi}{2})$

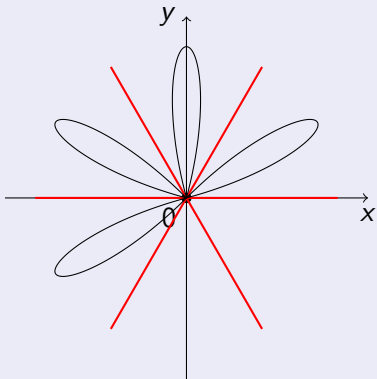
Поворотом вокруг полюса на  $\frac{2\pi}{3}$  построим часть кривой в секторе  $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi$ .



## Периодичность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \sin(6\varphi - \frac{\pi}{2})$

Поворотом вокруг полюса на  $\pi$  построим часть кривой в секторе  $\pi \leq \varphi \leq \frac{4\pi}{3}$ .

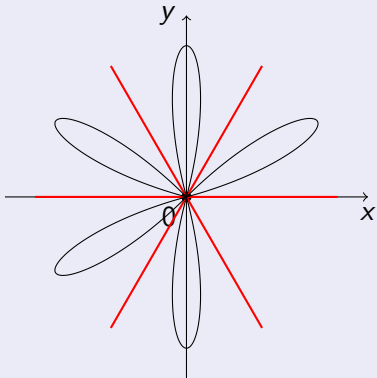




## Периодичность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \sin(6\varphi - \frac{\pi}{2})$

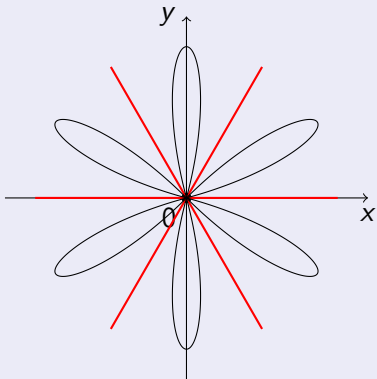
Поворотом вокруг полюса на  $\frac{4\pi}{3}$  построим часть кривой в секторе  $\frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$ .



## Периодичность по $\varphi$

Пример:  $\rho = \sin(6\varphi - \frac{\pi}{2})$

И поворотом вокруг полюса на  $\frac{5\pi}{3}$  построим часть кривой в секторе  $\frac{5\pi}{3} \leq \varphi \leq 2\pi$ .



# План

- 1 Полярная система координат
  - Определение полярной системы координат
  - Построение точки в полярной системе координат
  - Связь полярной и декартовой систем координат
- 2 Некоторые свойства кривых, заданных в полярной системе координат
  - Область изменения угла
  - Чётность по углу
  - Периодичность по углу
- 3 Построение кривых в полярной системе координат
  - Алгоритм построения кривой
  - Примеры построения кривых

# Алгоритм построения кривой

## Алгоритм

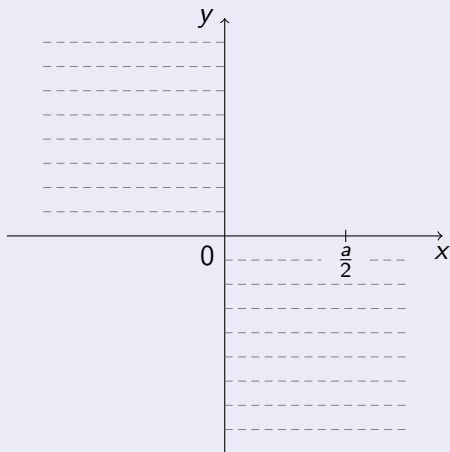
1. Определить область изменения  $\varphi$  и «выбросить» секторы, в которых  $\rho < 0$ .
2. Определить является ли функция  $\rho(\varphi)$  периодической. Если да, то строить будем часть кривой в секторе, который содержит луч  $\varphi = 0$ . Если такого сектора нет, то в том который выше луча  $\varphi = 0$ .
3. Определить является ли функция  $\rho(\varphi)$  чётной. Если да, то строить будем часть кривой в верхней полуплоскости.
4. Построить по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.
5. Пользуясь свойствами чётности и периодичности, полностью достроить кривую.

# План

- 1 Полярная система координат
  - Определение полярной системы координат
  - Построение точки в полярной системе координат
  - Связь полярной и декартовой систем координат
- 2 Некоторые свойства кривых, заданных в полярной системе координат
  - Область изменения угла
  - Чётность по углу
  - Периодичность по углу
- 3 Построение кривых в полярной системе координат
  - Алгоритм построения кривой
  - Примеры построения кривых

$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения

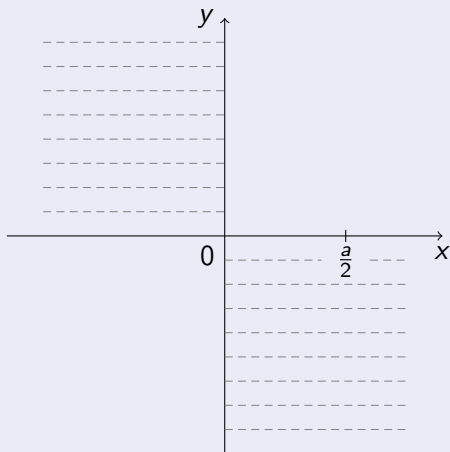


## Пояснения

1. Область изменения  $\varphi$  найдём из неравенства  $a \sin 2\varphi \geq 0 \iff \sin 2\varphi \geq 0 \iff \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Теперь «выбросим» ненужные сектора (заштрихуем их).

$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения

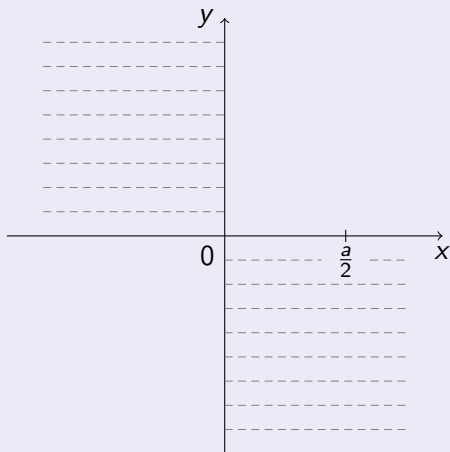


## Пояснения

2. Функция  $a \sin 2\varphi$   $\pi$ -периодическая. Будем строить часть кривой в секторе, который выше луча  $\varphi = 0$ .

$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

### Построения



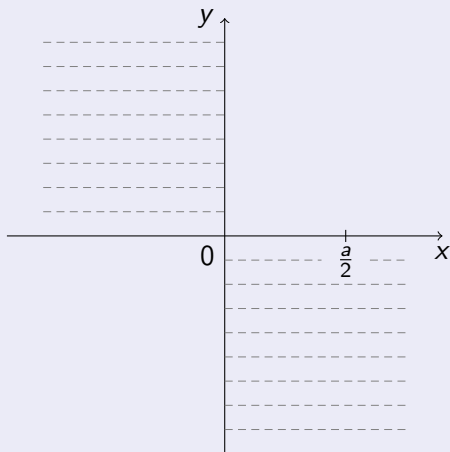
### Пояснения

3. Функция  $a \sin 2\varphi$   
нечётная.



$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения



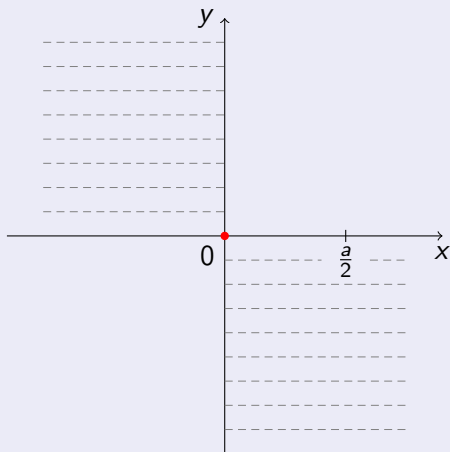
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.



$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения



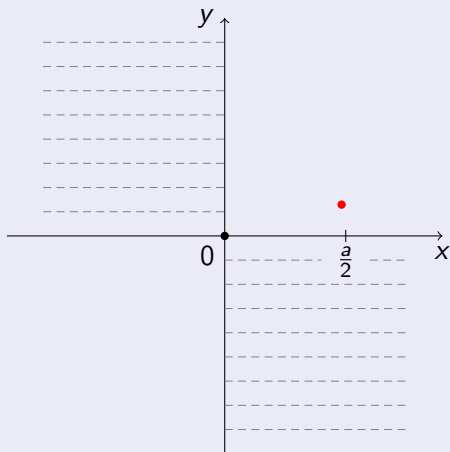
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	0

$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения



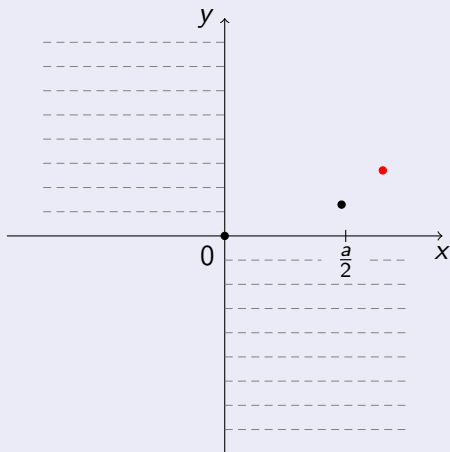
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	0
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{a}{2}$

$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения



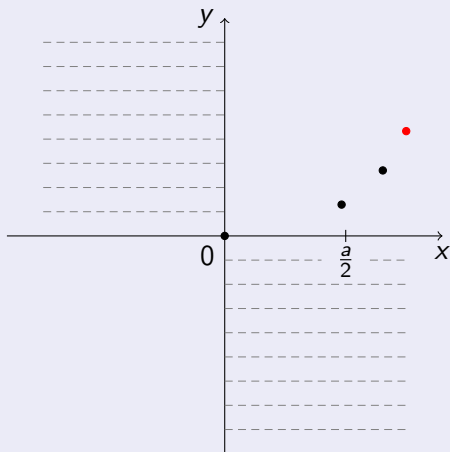
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	0
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения



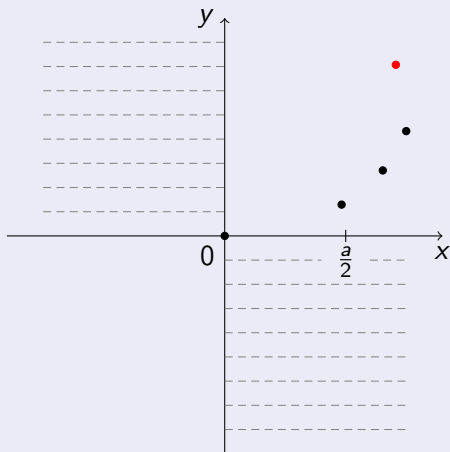
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	0
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения



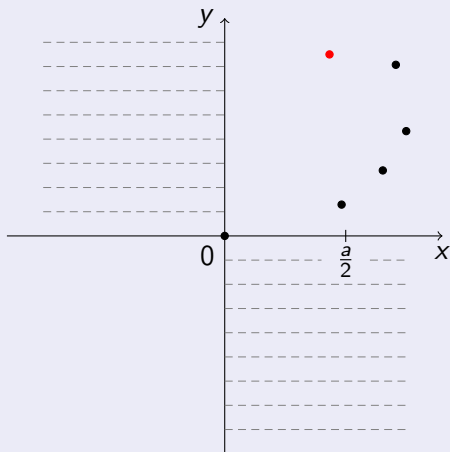
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	0
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$a$

$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения



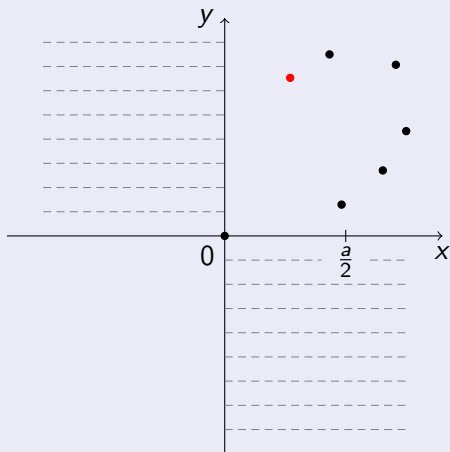
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения



## Пояснения

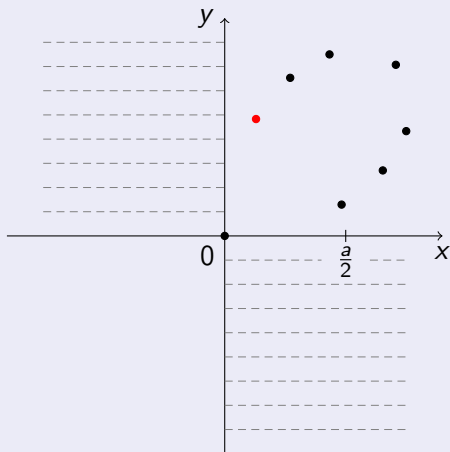
4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$



$$\rho = a \sin 2\varphi \quad (\text{двулистник})$$

## Построения



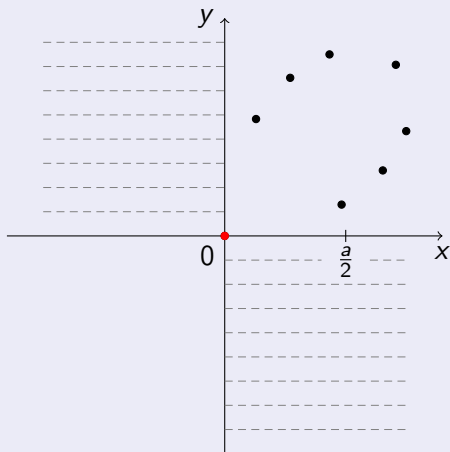
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{a}{2}$

$$\rho = a \sin 2\varphi \quad (\text{двулистник})$$

## Построения



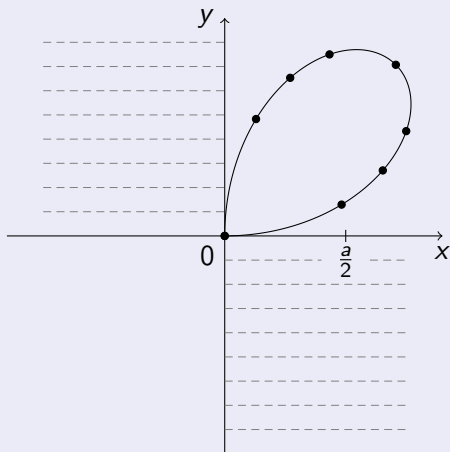
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0

$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения



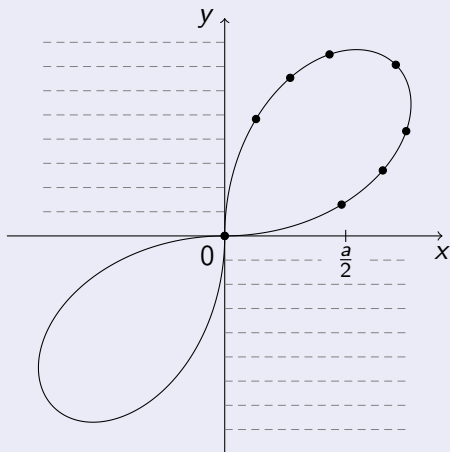
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

Отмеченные точки соединим плавной кривой.

$$\rho = a \sin 2\varphi \text{ (двулистник)}$$

## Построения

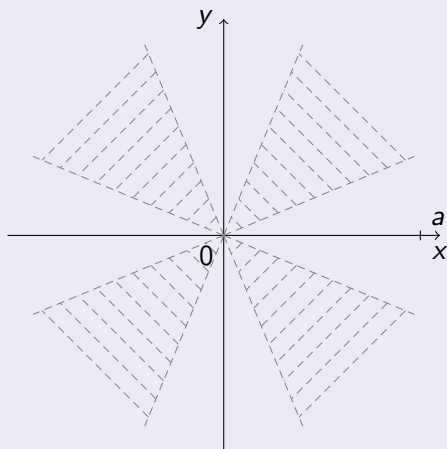


## Пояснения

5. Пользуясь свойством периодичности, полностью достраиваем кривую.

$$\rho = a \cos 4\varphi \quad (\text{четырёхлистник})$$

## Построения



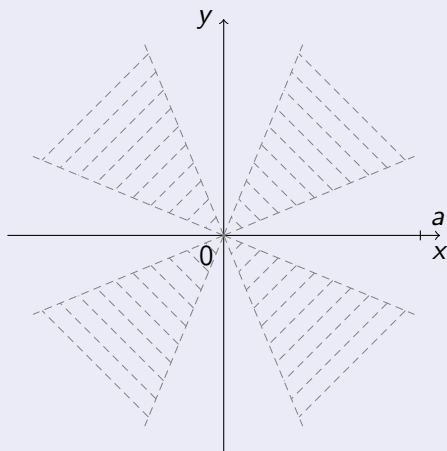
## Пояснения

1. Область изменения  $\varphi$  найдём из неравенства  $a \cos 4\varphi \geq 0 \iff \cos 4\varphi \geq 0 \iff -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$ .

Теперь «выбросим» ненужные сектора (заштрихуем их).

$$\rho = a \cos 4\varphi \text{ (четырёхлистник)}$$

## Построения

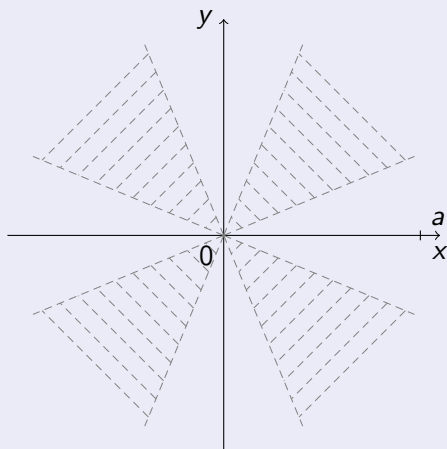


## Пояснения

2. Функция  $a \cos 4\varphi$   
 $\frac{\pi}{2}$ -периодическая. Будем строить часть кривой в секторе, который пересекает луч  $\varphi = 0$ .

$$\rho = a \cos 4\varphi \text{ (четырёхлистник)}$$

### Построения

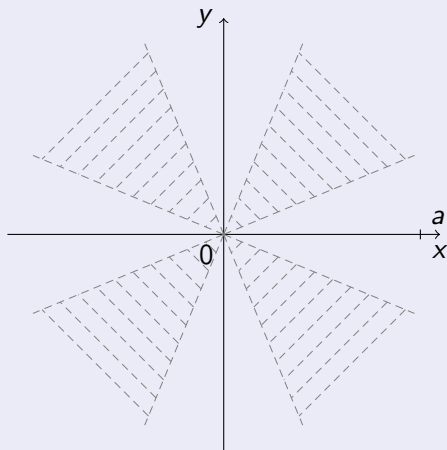


### Пояснения

3. Функция  $a \cos 4\varphi$  чётная.  
Будем строить часть кривой в верхней полуплоскости.

$$\rho = a \cos 4\varphi \text{ (четырёхлистник)}$$

## Построения



## Пояснения

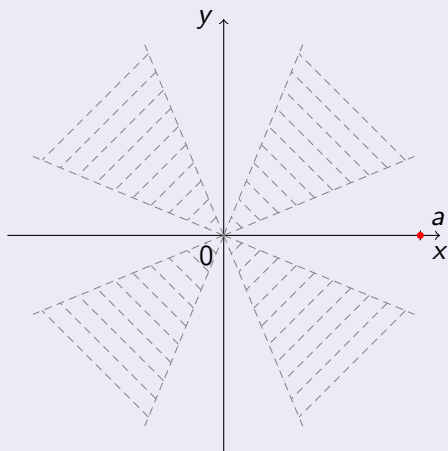
4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.





$$\rho = a \cos 4\varphi \text{ (четырёхлистник)}$$

## Построения



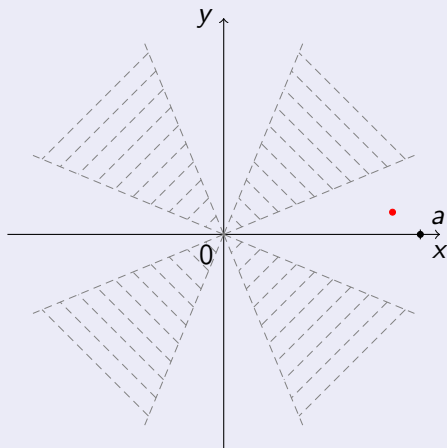
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	a

$$\rho = a \cos 4\varphi \text{ (четырёхлистник)}$$

## Построения



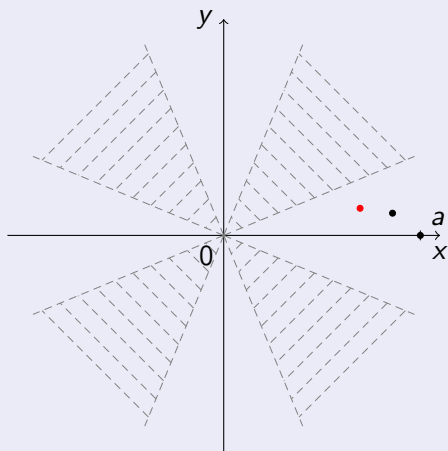
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$a$
$\frac{\pi}{24}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\rho = a \cos 4\varphi \text{ (четырёхлистник)}$$

## Построения



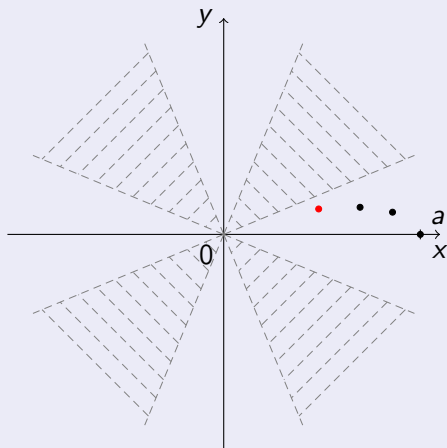
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$a$
$\frac{\pi}{24}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{16}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\rho = a \cos 4\varphi \quad (\text{четырёхлистник})$$

## Построения



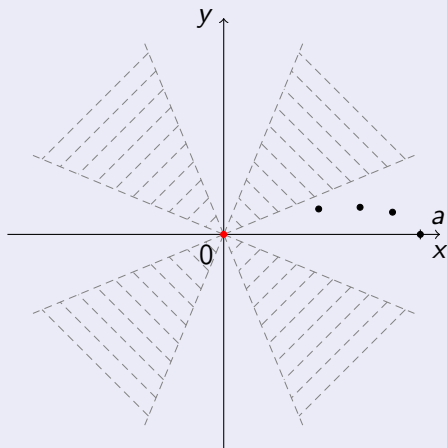
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$a$
$\frac{\pi}{24}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{16}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{a}{2}$

$$\rho = a \cos 4\varphi \quad (\text{четырёхлистник})$$

## Построения



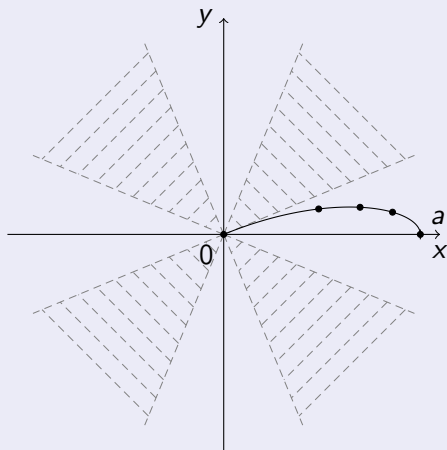
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$a$
$\frac{\pi}{24}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{16}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{8}$	0

$$\rho = a \cos 4\varphi \text{ (четырёхлистник)}$$

## Построения



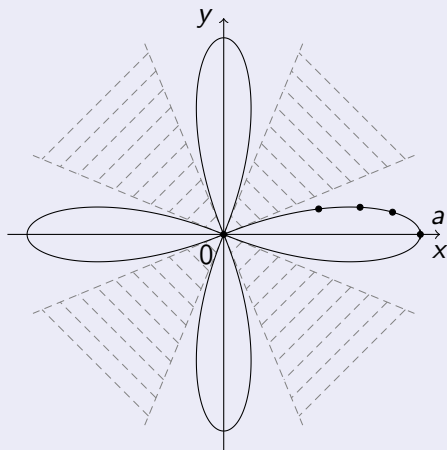
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

Соединим построенные точки плавной кривой.

$$\rho = a \cos 4\varphi \text{ (четырёхлистник)}$$

## Построения

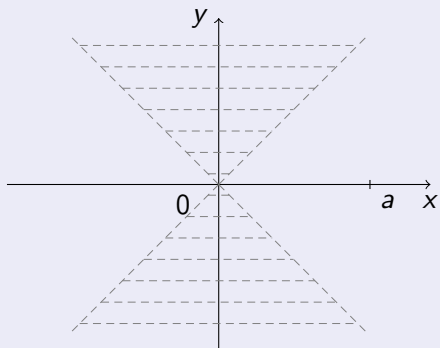


## Пояснения

5. Пользуясь свойствами периодичности и чётности, полностью достраиваем кривую.

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения



## Пояснения

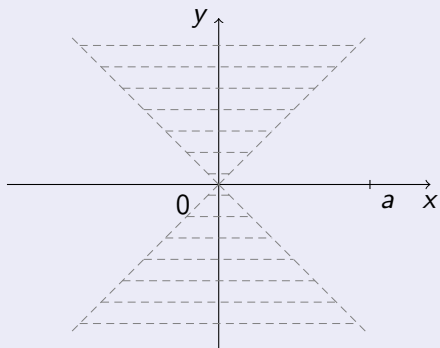
1. Область изменения  $\varphi$  найдём из неравенства  $|a|\sqrt{\cos 2\varphi} \geq 0$ .  $\Leftrightarrow$   
 $\cos 2\varphi \geq 0 \Leftrightarrow$   
 $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$   
 $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$   
 $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k,$   
 $k \in \mathbb{Z}$

Теперь «выбросим»  
ненужные сектора  
(заштрихуем их).



$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения

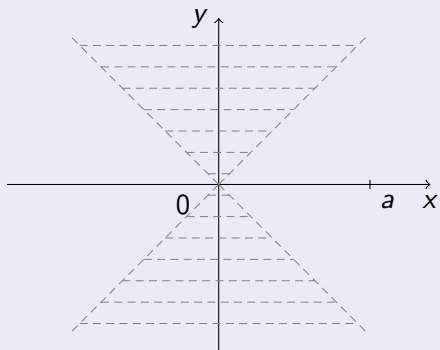


## Пояснения

2. Функция  $|a|\sqrt{\cos 2\varphi}$   $\pi$ -периодическая. Будем строить часть кривой в секторе содержащем луч  $\varphi = 0$ .

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения

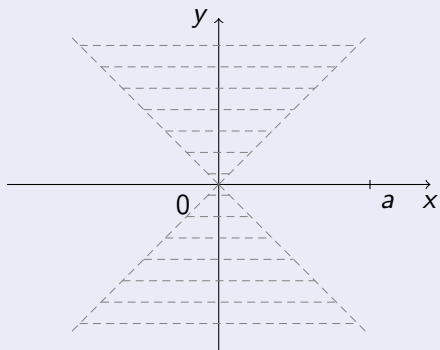


## Пояснения

3. Функция  $|a|\sqrt{\cos 2\varphi}$  чётная. Будем строить часть кривой в верхней полуплоскости.

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения



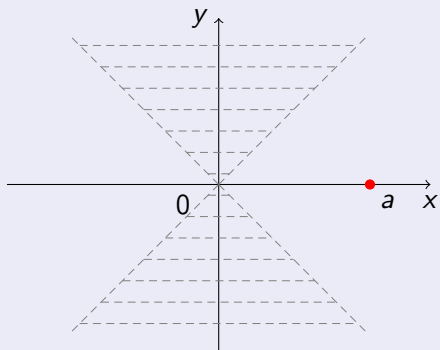
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.



$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения



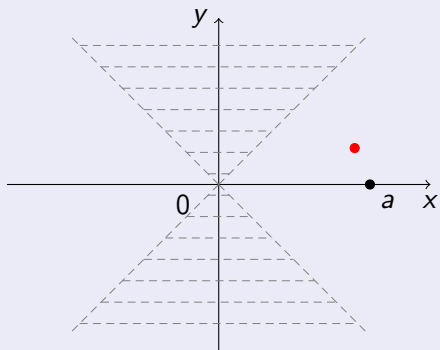
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	a

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения



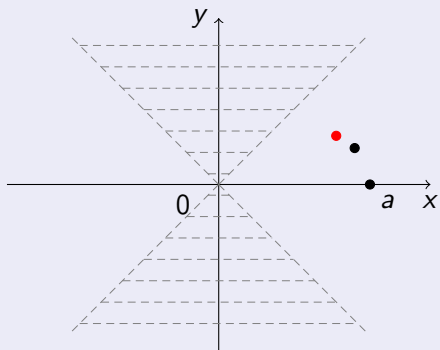
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$a$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{a\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения



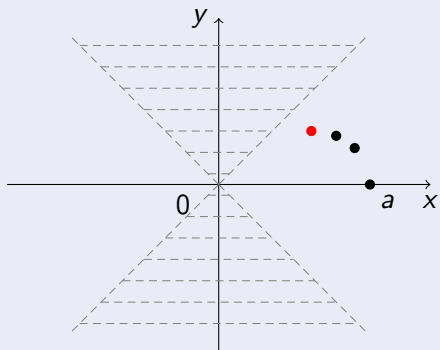
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$a$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{a\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{a}{\sqrt[4]{2}}$

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения



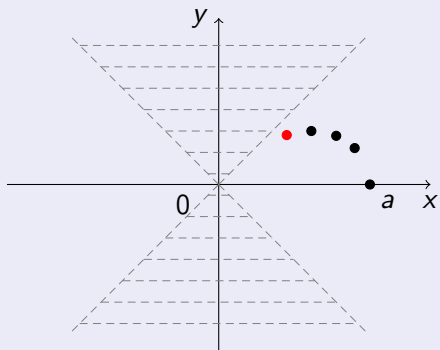
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$a$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{a\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{a}{\sqrt[4]{2}}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения



## Пояснения

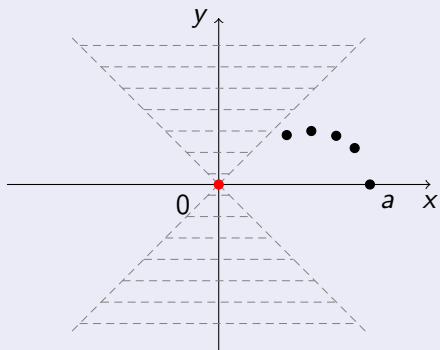
4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{\pi}{5}$	$a\sqrt{\cos \frac{2\pi}{5}}$



$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения



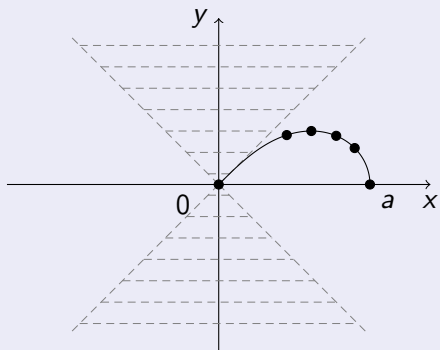
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{\pi}{5}$	$a\sqrt{\cos \frac{2\pi}{5}}$
$\frac{\pi}{4}$	0

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения



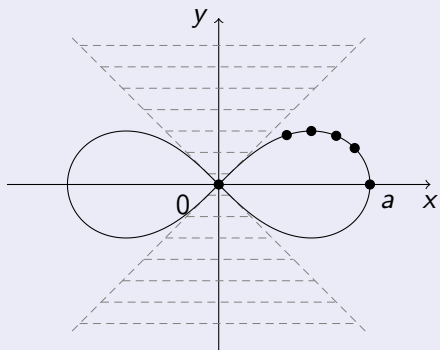
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

Соединим построенные точки плавной кривой.

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0 \quad (\text{лемниската Бернулли})$$

## Построения

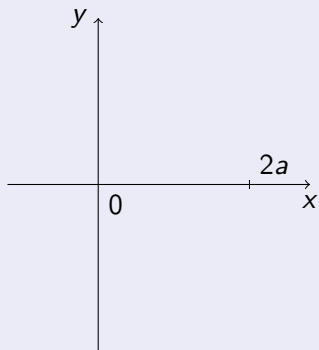


## Пояснения

5. Пользуясь свойствами чётности и периодичности, полностью достраиваем кривую.

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

### Построения

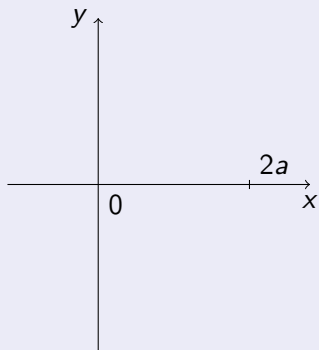


### Пояснения

1. Область изменения  $\varphi$  найдём из неравенства  $a(1 + \cos \varphi) \geq 0 \iff \cos \varphi \geq -1 \iff \varphi \in \mathbb{R}$

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

### Построения

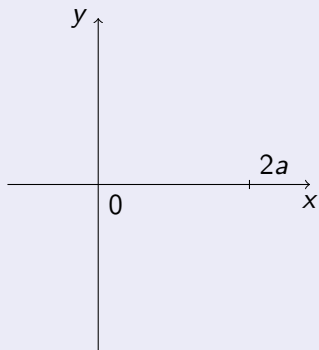


### Пояснения

2. Функция  $a(1 + \cos \varphi)$   
 $2\pi$ -периодическая.

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

### Построения

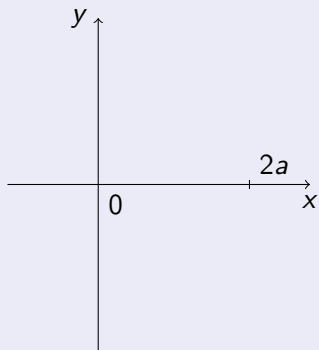


### Пояснения

3. Функция  $a(1 + \cos \varphi)$  чётная. Будем строить часть кривой в верхней полуплоскости.

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

### Построения



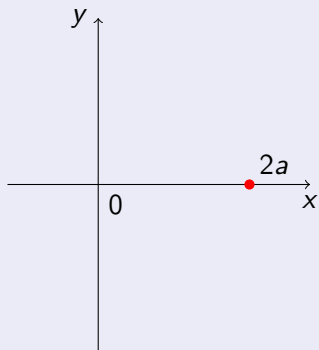
### Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.



$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

### Построения



### Пояснения

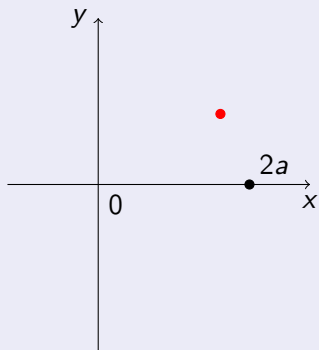
4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$2a$



$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \quad (\text{кардиоида})$$

### Построения



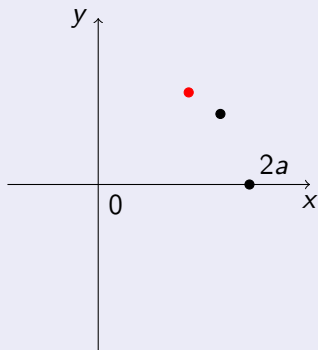
### Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$2a$
$\frac{\pi}{6}$	$a(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

### Построения



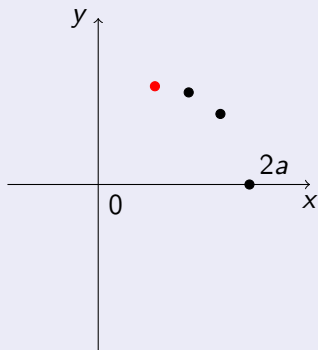
### Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$2a$
$\frac{\pi}{6}$	$a(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$
$\frac{\pi}{4}$	$a(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

### Построения



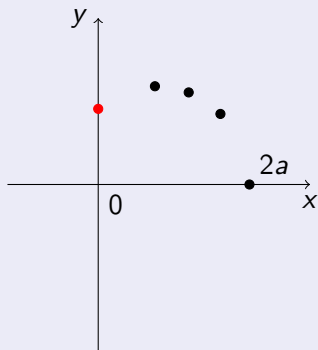
### Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$2a$
$\frac{\pi}{6}$	$a(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$
$\frac{\pi}{4}$	$a(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3a}{2}$

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

### Построения



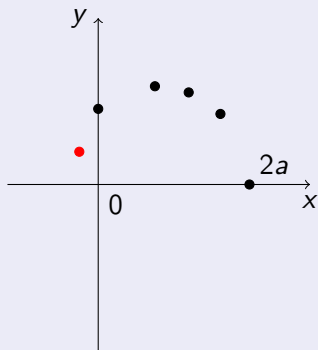
### Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
0	$2a$
$\frac{\pi}{6}$	$a(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$
$\frac{\pi}{4}$	$a(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3a}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$a$

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

## Построения



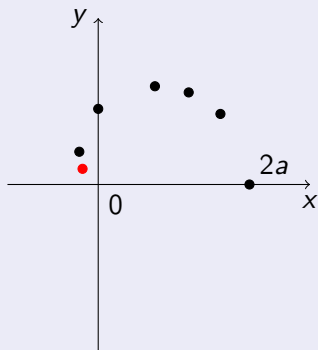
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{a}{2}$

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

## Построения



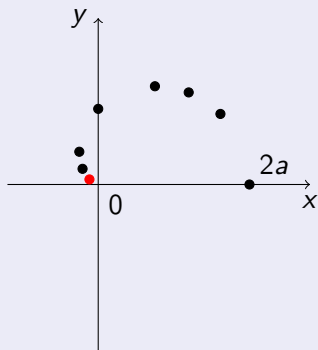
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$a(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

## Построения



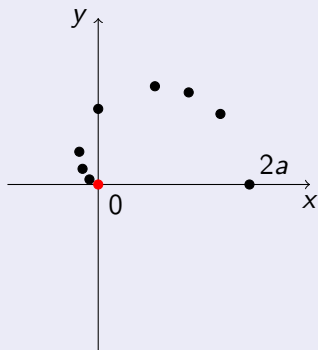
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$a(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{5\pi}{6}$	$a(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

### Построения



### Пояснения

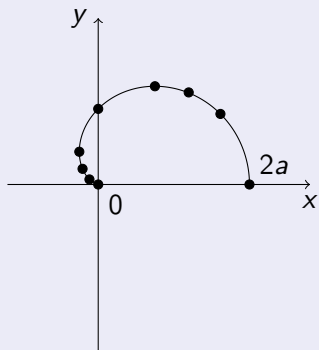
4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$a(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$
$\frac{5\pi}{6}$	$a(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$
$\pi$	0



$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

### Построения



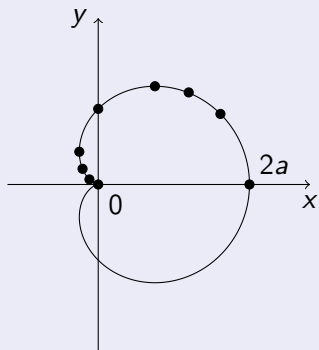
### Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

Соединим построенные точки плавной кривой.

$$\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad a > 0 \text{ (кардиоида)}$$

### Построения

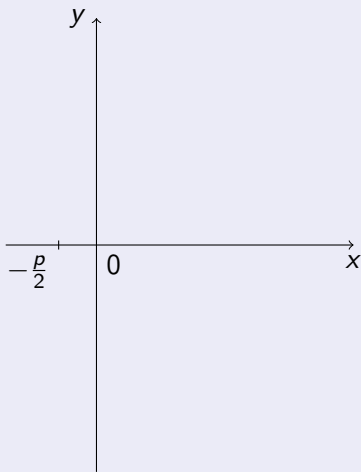


### Пояснения

5. Пользуясь свойством чётности, полностью достраиваем кривую.

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения



## Пояснения

1. Область изменения  $\varphi$  найдём из неравенства

$$\frac{p}{1 - \cos \varphi} \geq 0 \iff$$

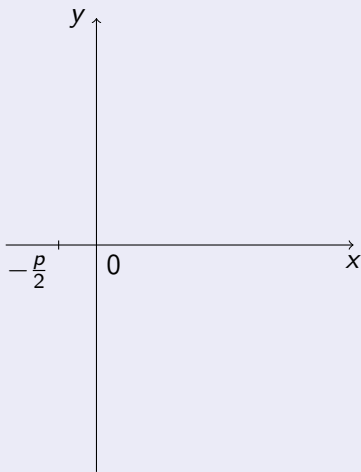
$$1 - \cos \varphi > 0 \iff$$

$$\cos \varphi < 1 \iff$$

$$\varphi \neq 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения

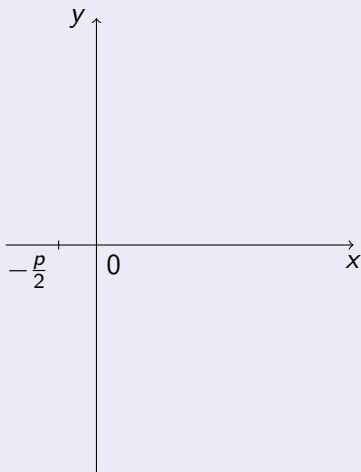


## Пояснения

2. Функция  $\frac{p}{1 - \cos \varphi}$   
 $2\pi$ -периодическая.

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения

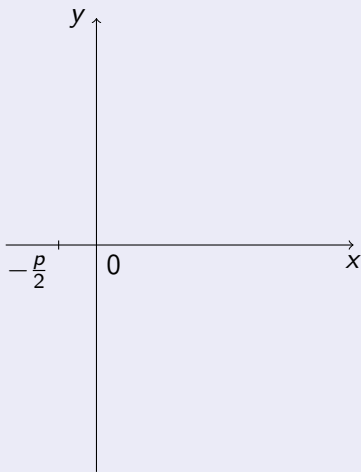


## Пояснения

3. Функция  $\frac{p}{1 - \cos \varphi}$  чётная. Будем строить часть кривой в верхней полуплоскости.

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения



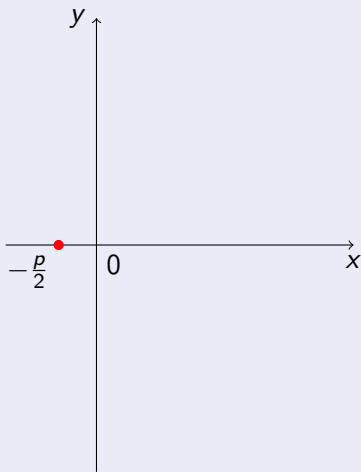
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.



$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения



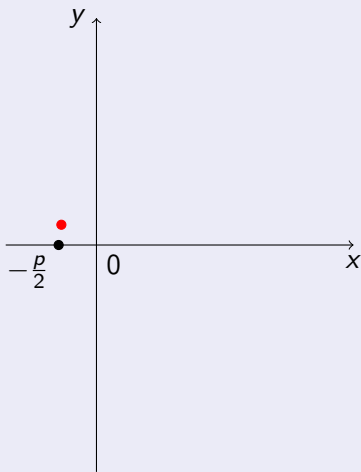
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
$\pi$	$\frac{p}{2}$

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения



## Пояснения

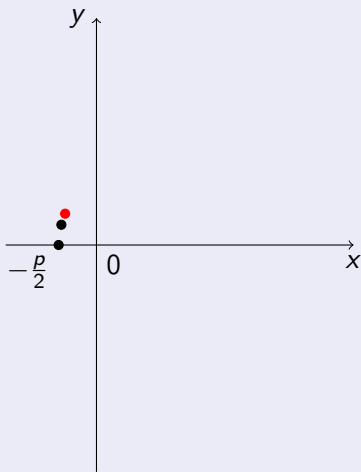
4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
$\pi$	$\frac{p}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2p}{2+\sqrt{3}}$



$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения



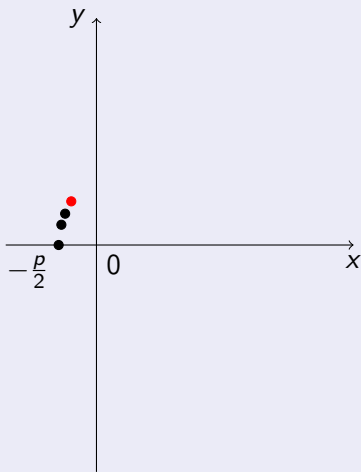
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
$\pi$	$\frac{p}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2p}{2+\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2p}{2+\sqrt{2}}$

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения



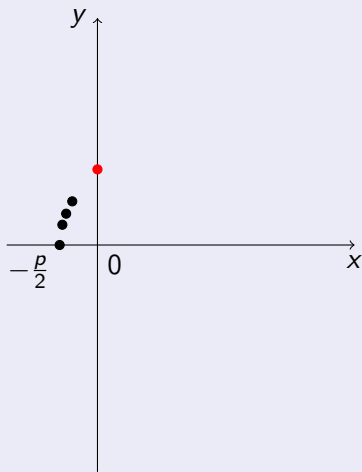
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
$\pi$	$\frac{p}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2p}{2+\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2p}{2+\sqrt{2}}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2p}{3}$

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения



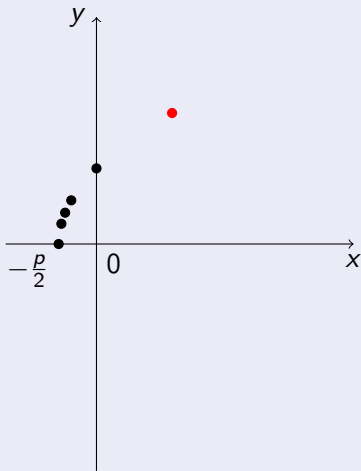
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{\pi}{2}$	$p$

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения



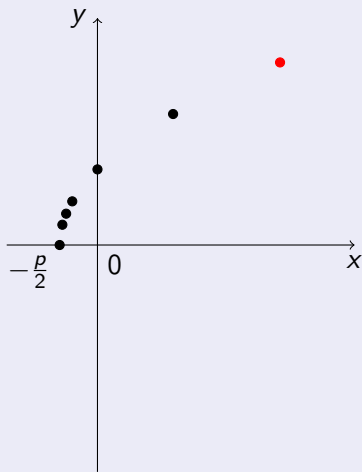
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{\pi}{2}$	$p$
$\frac{\pi}{3}$	$2p$

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения



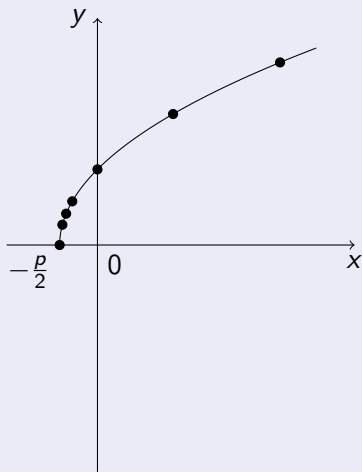
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{\pi}{2}$	$p$
$\frac{\pi}{3}$	$2p$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2p}{2 - \sqrt{2}}$

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения



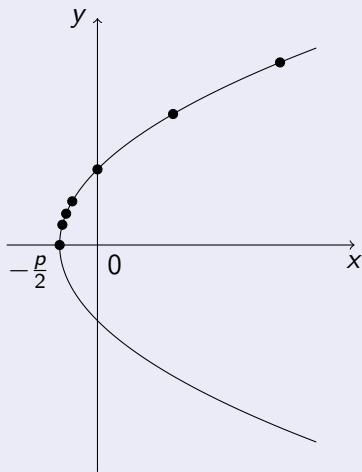
## Пояснения

4. Построим по точкам часть кривой в секторе, найденном в п.1-3.

Соединим построенные точки плавной кривой.

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad p > 0 \text{ (парабола)}$$

## Построения



## Пояснения

5. Пользуясь свойством чётности, полностью достраиваем кривую.

$$x^3 + y^3 = 3ax, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

Перейдем к полярным координатам. Для этого воспользуемся формулами перехода.

$$\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi = 3a\rho \cos \varphi \rho \sin \varphi \iff$$

$$\rho^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 3a\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \iff$$

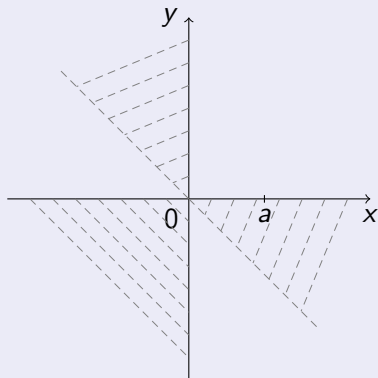
$$\rho (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 3a \cos \varphi \sin \varphi \iff$$

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$$



$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



## Пояснения

1. Область изменения  $\varphi$

найдем из неравенства

$$\frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} \geq 0 \iff \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)(1 - \cos \varphi \sin \varphi)} \geq 0$$

$$\iff \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi} \geq 0 \iff$$

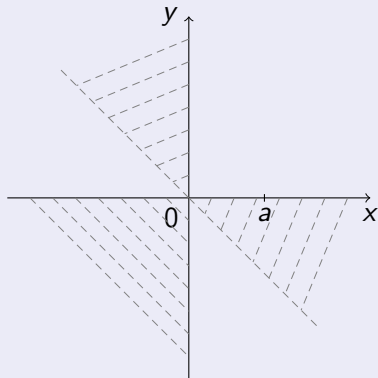
$$\begin{cases} 2\pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k < \varphi \leq \pi + 2\pi k \\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \leq \varphi < \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$ .

Теперь «выбросим» ненужные сектора (заштрихуем их).

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения

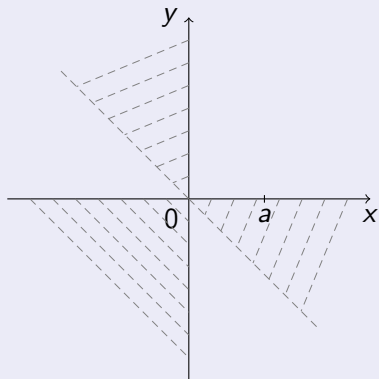


## Пояснения

2. Функция  $\frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$  не является периодической.

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения

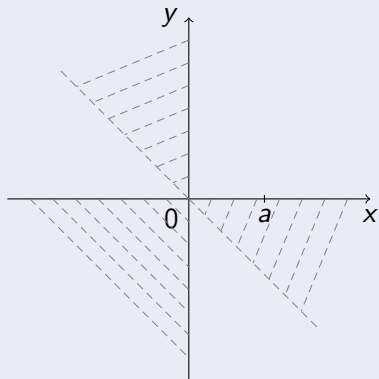


## Пояснения

3. Функция  $\frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$  нечётная.

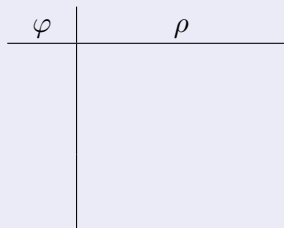
$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



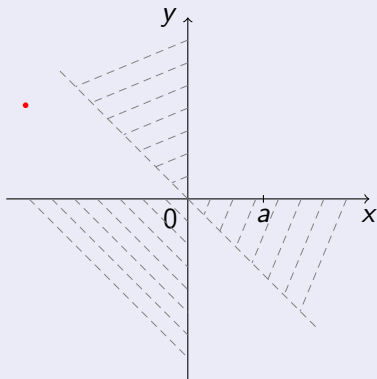
## Пояснения

4. Построим по точкам всю кривую.



$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



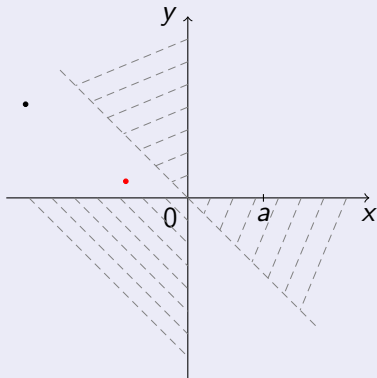
## Пояснения

4. Построим по точкам всю кривую.

$\varphi$	$\rho$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3a \cos \frac{5\pi}{6} \sin \frac{5\pi}{6}}{\cos^3 \frac{5\pi}{6} + \sin^3 \frac{5\pi}{6}}$

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



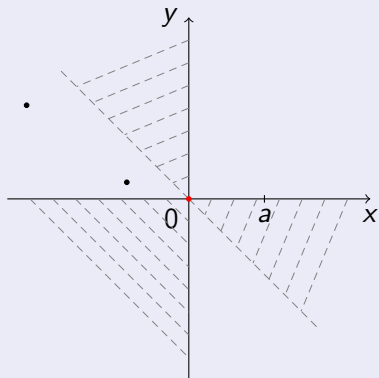
## Пояснения

4. Построим по точкам всю кривую.

$\varphi$	$\rho$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3a \cos \frac{5\pi}{6} \sin \frac{5\pi}{6}}{\cos^3 \frac{5\pi}{6} + \sin^3 \frac{5\pi}{6}}$
$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{3a \cos \frac{11\pi}{12} \sin \frac{11\pi}{12}}{\cos^3 \frac{11\pi}{12} + \sin^3 \frac{11\pi}{12}}$

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



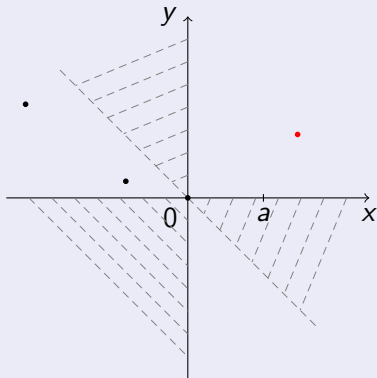
## Пояснения

4. Построим по точкам всю кривую.

$\varphi$	$\rho$
...	...
0	0

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



## Пояснения

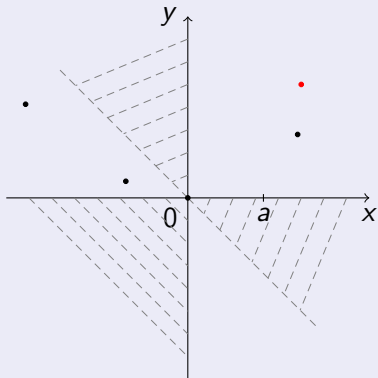
4. Построим по точкам всю кривую.

$\varphi$	$\rho$
...	...
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{6\sqrt{3}a}{3\sqrt{3}+1}$



$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



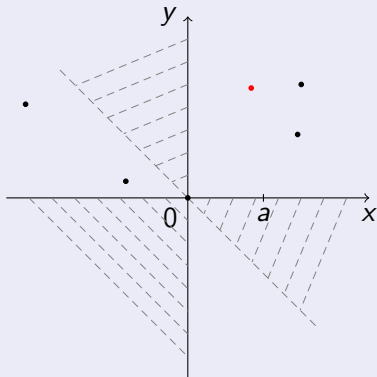
## Пояснения

4. Построим по точкам всю кривую.

$\varphi$	$\rho$
...	...
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{6\sqrt{3}a}{3\sqrt{3}+1}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}a}{2}$

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



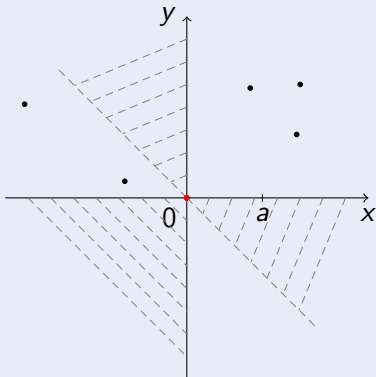
## Пояснения

4. Построим по точкам всю кривую.

$\varphi$	$\rho$
...	...
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{6\sqrt{3}a}{3\sqrt{3}+1}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}a}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{6\sqrt{3}a}{3\sqrt{3}+1}$

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



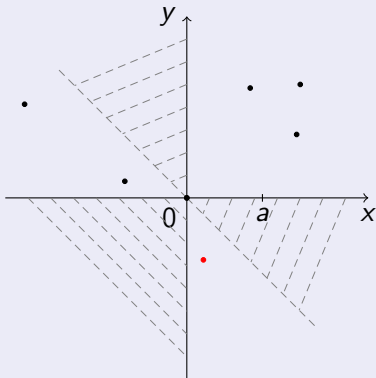
## Пояснения

4. Построим по точкам всю кривую.

$\varphi$	$\rho$
...	...
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{6\sqrt{3}a}{3\sqrt{3}+1}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\sqrt{2}a}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{6\sqrt{3}a}{3\sqrt{3}+1}$
$\frac{\pi}{2}$	0

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



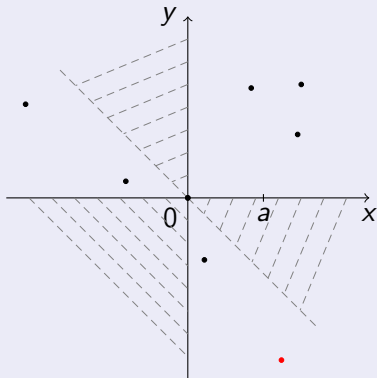
## Пояснения

4. Построим по точкам всю кривую.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{3a \cos \frac{19\pi}{12} \sin \frac{19\pi}{12}}{\cos^3 \frac{19\pi}{12} + \sin^3 \frac{19\pi}{12}}$

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



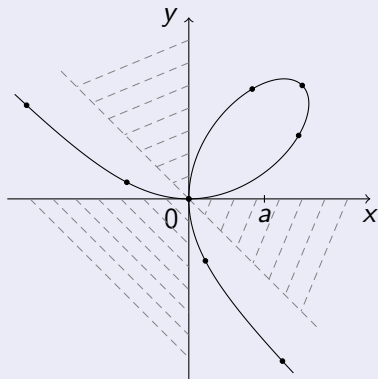
## Пояснения

4. Построим по точкам всю кривую.

$\varphi$	$\rho$
...	...
$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{3a \cos \frac{19\pi}{12} \sin \frac{19\pi}{12}}{\cos^3 \frac{19\pi}{12} + \sin^3 \frac{19\pi}{12}}$
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3a \cos \frac{5\pi}{3} \sin \frac{5\pi}{3}}{\cos^3 \frac{5\pi}{3} + \sin^3 \frac{5\pi}{3}}$

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}, \quad a > 0 \quad (\text{лист Декарта})$$

## Построения



## Пояснения

4. Построим по точкам всю кривую.

Соединим построенные точки плавной кривой.

# Источники



Википедия, свободная энциклопедия.

<http://en.wikipedia.org> и <http://ru.wikipedia.org>.



ДЕМИДОВИЧ Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: «ЧеРо», 1997.



Ляшко И.И. и др. Справочное пособие по высшей математике. Т.1 — М.: «Едиторнал УРСС», 2001.



КУДРЯВЦЕВ Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1 — М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2005.