Жадный алгоритм устойчивого скрещивания разбиений

Т. С. Синяк, Е. А. Максименко

Южный федеральный университет

5 апреля 2008 г.

План доклада

1. Введение
2. Разбиения множеств и раскраски
   - Разбиения множеств
   - Хранение разбиений в виде кортежей («раскрасок»)
   - Расстояние между разбиениями
   - Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок
3. Геометрическое и устойчивое скрещивания разбиений
   - Геометрическое и устойчивое скрещивания
   - Сведение к задаче о назначении
   - Жадный алгоритм
   - Свойства жадного алгоритма
4. Применение в генетических алгоритмах
   - Опробованные эволюционные схемы
   - Экспериментальные результаты

Генетические алгоритмы

Генетические алгоритмы — один из современных методов решения NP-трудных задач оптимизации.

Схема алгоритма

Создать начальную популяцию
Для $t = 1 \dots T$ (T — число поколений):
  Для $i = 1 \dots NP/2$ (NP — число особей):
    Выбрать две особи
    Скрестить выбранные особи
    Поместить потомков во множество потомков
  Для $i = 1 \dots NP$:
    Мутировать i-ую особь
    Поместить мутанта во множество мутантов
  Добавить всех потомков и мутантов в популяцию
  Провести отбор

Задачи, связанные с перебором разбиений

Задача о минимальной правильной раскраске графа

Задача

Дано: неориентированный граф $G = (V, E)$.

Найти: минимальную правильную раскраску графа G, т. е. функцию $f\colon V \to \{1, 2, \dots, k\}$, такую что $f(u) \neq f(v)$ для любых смежных вершин $u, v \in V$ и k минимально.

Замечание

Правильную k-раскраску графа G можно рассматривать как разбиение V на не более, чем k непустых непересекающихся подмножеств.

Задача

Дано: множество X из $3m$ элементов,
граница $B \in \mathbb{Z}_+$,
«размеры» $s(x) \in \mathbb{Z}_+$, где $x \in X$, причём
$$B/4 < s(x) < B/2 \text{ и } \sum_{x \in X} s(x) = mB.$$

Найти: m непересекающихся подмножеств $Y_1, \ldots, Y_m$, таких что
$$\bigcup_{i=1}^{m} Y_i = X \text{ и } \sum_{x \in Y_i} s(x) = B \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Тривиальный алгоритм скрещивания разбиений

Разбиения хранятся в виде раскрасок:

`{{1},{2,5},{3,4,6}}` $\leftrightharpoons$ 123323

`{{1,2},{3,4,5,6}}` $\rightleftharpoons$ 112222

Тривиальный алгоритм скрещивания разбиений

Обмен генами осуществляется с заданной вероятностью:

$\{\{1\},\{2,5\},\{3,4,6\}\} \leftrightharpoons 123323$

обмен? $\quad$ FTTFFT

$\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\} \rightleftharpoons 112222$

Тривиальный алгоритм скрещивания разбиений

Обмен генами осуществляется с заданной вероятностью:

$$\begin{array}{rl} \{\{1\},\{2,5\},\{3,4,6\}\} \leftrightharpoons & 1\,2\,3\,3\,2\,3 \\ & \,\updownarrow\updownarrow\,\updownarrow\mapsto \\ \{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\} \rightleftharpoons & 1\,1\,2\,2\,2\,2 \end{array}$$

Тривиальный алгоритм скрещивания разбиений

Обмен генами осуществляется с заданной вероятностью:

$$
\begin{array}{rcl}
\{\{1\},\{2,5\},\{3,4,6\}\} \leftrightharpoons 123323 & & 112322 \rightleftharpoons \{\{1,2\},\{3,5,6\},\{4\}\} \\
\updownarrow\updownarrow \quad \updownarrow & \mapsto & \\
\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\} \rightleftharpoons 112222 & & 123223 \rightleftharpoons \{\{1\},\{2,4,5\},\{3,6\}\}
\end{array}
$$

Тривиальный алгоритм скрещивания разбиений

Обмен генами осуществляется с заданной вероятностью:

$$
\begin{array}{rcl}
\{\{1\},\{2,5\},\{3,4,6\}\} \leftrightharpoons 1\color{red}{23}32\color{red}{3} & & 112322 \rightleftharpoons \{\{1,2\},\{3,5,6\},\{4\}\} \\
\updownarrow\updownarrow \quad \updownarrow & \mapsto & \\
\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\} \rightleftharpoons 1\color{red}{12}22\color{red}{2} & & 123223 \rightleftharpoons \{\{1\},\{2,4,5\},\{3,6\}\}
\end{array}
$$

Недостаток

Плохо согласуется со структурой разбиений:

$$
\begin{array}{rcl}
\{1,2,3,4,5,6\} \leftrightharpoons 1\color{red}{11}11\color{red}{1} & & 122112 \rightleftharpoons \{\{1,4,5\},\{2,3,6\}\} \\
\updownarrow\updownarrow \quad \updownarrow & \mapsto & \\
\{\{1\},\{2,3,4,5,6\}\} \rightleftharpoons 1\color{red}{22}22\color{red}{2} & & 111221 \rightleftharpoons \{\{1,2,3,6\},\{4,5\}\}
\end{array}
$$

Цели работы

- Разработать алгоритм скрещивания, согласованный со структурой разбиений.
- Опробовать его в генетических алгоритмах.

План доклада

Разбиения множеств

Определение разбиения множества

Множество P непустых подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$ называется разбиением множества $\{1, \dots, n\}$, если

$$\bigcup_{X \in P} X = \{1, \dots, n\} \quad \text{и} \quad \forall X, Y \in P \colon Y \neq X \Rightarrow X \cap Y = \varnothing.$$

Обозначение

$\mathcal{P}_n$ — множество всех разбиений множества $\{1, \dots, n\}$.

Отношение эквивалентности, соответствующее разбиению

Пусть $P \in \mathcal{P}_n$. Определим отношение $\overset{P}{\sim}$:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad i \overset{P}{\sim} j \quad \Longleftrightarrow \quad \exists X \in P \quad i, j \in X.$$

План доклада

1. Введение
2. Разбиения множеств и раскраски
   - Разбиения множеств
   - Хранение разбиений в виде кортежей («раскрасок»)
   - Расстояние между разбиениями
   - Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок
3. Геометрическое и устойчивое скрещивания разбиений
   - Геометрическое и устойчивое скрещивания
   - Сведение к задаче о назначении
   - Жадный алгоритм
   - Свойства жадного алгоритма
4. Применение в генетических алгоритмах
   - Опробованные эволюционные схемы
   - Экспериментальные результаты

Раскраски

Определение раскраски

Раскраской множества $\{1, \ldots, n\}$ будем называть любое отображение $a \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.
Это отображение a будем отождествлять с кортежем $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = a(i)$.
Значение a_i будем называть цветом элемента i для $i \in \{1, \ldots, n\}$ (при раскраске a).

Обозначение

$\mathcal{C}_n$ — множество всех раскрасок множества $\{1, \ldots, n\}$.

Раскраски и разбиения

Определение и пример

Определение разбиения, соответствующего раскраске

Пусть $a \in \mathcal{C}_n$. Определим разбиение P_a, соответствующее раскраске a:

$$P_a = \{a^{-1}(k) \colon \quad k = 1, \ldots, n, \quad a^{-1}(k) \neq \varnothing\}.$$

Другими словами, в одну долю попадают элементы одного цвета:

$$i \overset{P_a}{\sim} j \quad \iff \quad a_i = a_j \quad (i, j \in \{1, \ldots, n\}).$$

Пример

$a = (5, 2, 2, 1, 5)$,
$a^{-1}(1) = \{4\}$, $a^{-1}(2) = \{2, 3\}$, $a^{-1}(3) = a^{-1}(4) = \varnothing$, $a^{-1}(5) = \{1, 5\}$,
$P_a = \{\{1, 5\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$.

Раскраски и разбиения

Эквивалентность раскрасок

Отображение $a \mapsto P_a$ сюръективно, но не инъективно. Несколько раскрасок могут соответствовать одному разбиению:
$a = (2, 5, 2, 5, 3)$, $b = (3, 2, 3, 2, 1)$, $P_a = P_b = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$.

Определение эквивалентных раскрасок

Пусть $a, b \in \mathcal{C}_n$. Раскраски a и b будем называть эквивалентными ($a \sim b$), если $P_a = P_b$.

Критерий эквивалентности раскрасок

Раскраски эквивалентны, если одну можно получить из другой путём перенумерации цветов:

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \varphi \in S_n : \quad \varphi \circ a = b.$$

Здесь S_n — множество всех перестановок порядка n,
т. е. биективных отображений множества $\{1, \ldots, n\}$ в себя.

Раскраски и разбиения

Упорядоченные раскраски

Определение упорядоченной раскраски

Раскраску a из $\mathcal{C}_n$ будем называть упорядоченной, если

$$a_1 = 1, \quad a_i \leqslant 1 + \max(a_1, \ldots, a_{i-1}) \quad (2 \leqslant i \leqslant n).$$

Пример

$a = (1, 1, 2, 1, 3, 2, 3)$ — упорядоченная раскраска;
$b = (1, 1, 3, 1, 2, 3, 2)$ — неупорядоченная раскраска (цвет 3 появился раньше, чем цвет 2).

Свойства упорядоченных раскрасок

Упорядоченная раскраска является лексикографически наименьшей среди всех эквивалентных ей раскрасок. Соответствие между упорядоченными раскрасками и разбиениями биективно.

Нормализация раскраски

Понятие и алгоритм нормализации

Нормализация — преобразование произвольной раскраски в эквивалентную ей упорядоченную раскраску.

Вход

$a = (a_1, \dots, a_n)$ — произвольная раскраска.

Вспомогательная структура

t — массив из n элементов:

$t[j]$ — цвет, в который перейдёт цвет j;

если для j цвет ещё не найден, то $t[j] = 0$.

Выход

$b = (t[a_1], \dots, t[a_n])$ — упорядоченная раскраска, эквивалентная a.

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1)$.

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \qquad n = 6$

Комментарии

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1)$.

$$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \qquad n = 6$$
$$t = (0, 0, 0, 0, 0, 0), \qquad c = 0$$

Выход

$b = (t[a_1], \ldots, t[a_n])$.

Комментарии

c — число использованных цветов.

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1).$

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \qquad n = 6$

$t = (0, 0, 0, 0, 0, 0), \qquad c = 0$

Выход

$b = (t[a_1], \ldots, t[a_n]).$

Комментарии

$t[2] = 0: \quad c \leftarrow c + 1, \quad t[2] \leftarrow c.$

Нормализация раскраски
Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1).$

$$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \qquad n = 6$$
$$t = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \qquad c = 1$$

Выход

$b = (t[a_1], \ldots, t[a_n]).$

Комментарии

$t[2] = 0\colon \quad c \leftarrow c + 1, \quad t[2] \leftarrow c.$

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1).$

$$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \qquad n = 6$$
$$t = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \qquad c = 1$$

Выход

$b = (t[a_1], \ldots, t[a_n]).$

Комментарии

$t[3] = 0\colon \quad c \leftarrow c + 1, \quad t[3] \leftarrow c.$

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1).$

$$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \qquad n = 6$$
$$t = (0, 1, 2, 0, 0, 0), \qquad c = 2$$

Выход

$b = (t[a_1], \ldots, t[a_n]).$

Комментарии

$t[3] = 0: \quad c \leftarrow c + 1, \quad t[3] \leftarrow c.$

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1).$

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \qquad n = 6$

$t = (0, 1, 2, 0, 0, 0), \qquad c = 2$

Выход

$b = (t[a_1], \ldots, t[a_n]).$

Комментарии

$t[1] = 0: \quad c \leftarrow c + 1, \quad t[1] \leftarrow c.$

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1).$

$$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \qquad n = 6$$
$$t = (3, 1, 2, 0, 0, 0), \qquad c = 3$$

Выход

$b = (t[a_1], \ldots, t[a_n]).$

Комментарии

$t[1] = 0: \quad c \leftarrow c + 1, \quad t[1] \leftarrow c.$

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1).$

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \qquad n = 6$

$t = (3, 1, 2, 0, 0, 0), \qquad c = 3$

Выход

$b = (t[a_1], \ldots, t[a_n]).$

Комментарии

$t[2] = 1 \neq 0:$ ничего не делаем.

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1).$

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \qquad n = 6$

$t = (3, 1, 2, 0, 0, 0), \qquad c = 3$

Выход

$b = (t[a_1], \ldots, t[a_n]).$

Комментарии

$t[5] = 0 : \quad c \leftarrow c + 1, \quad t[5] \leftarrow c.$

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1).$

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \quad n = 6$
$t = (3, 1, 2, 0, 4, 0), \quad c = 4$

Выход

$b = (t[a_1], \ldots, t[a_n]).$

Комментарии

$t[5] = 0: \quad c \leftarrow c + 1, \quad t[5] \leftarrow c.$

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1).$

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \quad n = 6$

$t = (3, 1, 2, 0, 4, 0), \quad c = 4$

Выход

$b = (t[a_1], \ldots, t[a_n]).$

Комментарии

$t[1] = 3 \neq 0:$ ничего не делаем.

Нормализация раскраски

Демонстрация работы алгоритма нормализации

Вход

$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1)$.

Выход

$b = (1, 2, 3, 1, 4, 3)$.

$$a = (2, 3, 1, 2, 5, 1), \qquad n = 6$$
$$t = (3, 1, 2, 0, 4, 0), \qquad c = 4$$

Комментарии

Сложность

Сложность алгоритма $O(n)$.

План доклада

1. Введение
2. Разбиения множеств и раскраски
   - Разбиения множеств
   - Хранение разбиений в виде кортежей («раскрасок»)
   - Расстояние между разбиениями
   - Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок
3. Геометрическое и устойчивое скрещивания разбиений
   - Геометрическое и устойчивое скрещивания
   - Сведение к задаче о назначении
   - Жадный алгоритм
   - Свойства жадного алгоритма
4. Применение в генетических алгоритмах
   - Опробованные эволюционные схемы
   - Экспериментальные результаты

Расстояние между разбиениями

Источники

В работах L. Denoeud и A. Guènoche определены различные расстояния между разбиениями. Будем рассматривать расстояние Règnier.

Определение расстояния

Расстояние между разбиениями будем определять как минимальное число элементарных операций, необходимых для превращения одного разбиения в другое. Здесь элементарная операция — перемещение одного элемента из одной доли в другую (возможно, пустую).

Пример

$P = \{\{1,2,5\},\{3,4\}\}, \quad Q = \{\{1,4\},\{2,5\},\{3\}\}, \quad d(P,Q) = 2$

$P = \{\{1,2,5\},\{3,4\}\} \to \{\{2,5\},\{1,3,4\}\} \to \{\{2,5\},\{1,4\},\{3\}\} = Q$

Расстояние между разбиениями в терминах раскрасок

Расстояние Хэмминга

Для $a, b \in \mathcal{C}_n$

$$d_H(a, b) = |\{i \colon 1 \leqslant i \leqslant n, a_i \neq b_i\}| = n - \sum_{i=1}^{n} \delta(a_i, b_i),$$

где $\delta(i, j)$ — символ Кронекера.

Расстояние между разбиениями

Пусть $a, b \in \mathcal{C}_n$. Тогда

$$d(P_a, P_b) = \min_{\varphi \in S_n} d_H(\varphi \circ a, b).$$

План доклада

1. Введение
2. Разбиения множеств и раскраски
   - Разбиения множеств
   - Хранение разбиений в виде кортежей («раскрасок»)
   - Расстояние между разбиениями
   - Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок
3. Геометрическое и устойчивое скрещивания разбиений
   - Геометрическое и устойчивое скрещивания
   - Сведение к задаче о назначении
   - Жадный алгоритм
   - Свойства жадного алгоритма
4. Применение в генетических алгоритмах
   - Опробованные эволюционные схемы
   - Экспериментальные результаты

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм мутации раскрасок

Вход

$a \in \mathcal{C}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad$ генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Выход

$b \in \mathcal{C}_n$, такая что $d(P_a, P_b) \leqslant k$.

Алгоритм

1. $b \leftarrow a$.
2. k раз выбрать случайно $i \in \{1, \ldots, n\}$ и записать в b_i случайное число от 1 до n.

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм мутации раскрасок

Вход

$a \in \mathcal{C}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad$ генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Выход

$b \in \mathcal{C}_n$, такая что $d(P_a, P_b) \leqslant k$.

Алгоритм

1. $b \leftarrow a$.
2. k раз выбрать случайно $i \in \{1, \ldots, n\}$ и записать в b_i случайное число от 1 до n.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad k = 3$

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм мутации раскрасок

Вход

$a \in \mathcal{C}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad$ генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Выход

$b \in \mathcal{C}_n$, такая что $d(P_a, P_b) \leqslant k$.

Алгоритм

1. $b \leftarrow a$.
2. k раз выбрать случайно $i \in \{1, \ldots, n\}$ и записать в b_i случайное число от 1 до n.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad k = 3$

$b = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad i = \qquad r =$

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм мутации раскрасок

Вход

$a \in \mathcal{C}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad$ генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Выход

$b \in \mathcal{C}_n$, такая что $d(P_a, P_b) \leqslant k$.

Алгоритм

1. $b \leftarrow a$.
2. k раз выбрать случайно $i \in \{1, \dots, n\}$ и записать в b_i случайное число от 1 до n.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad k = 3$

$b = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad i = 2 \qquad r =$

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм мутации раскрасок

Вход

$a \in \mathcal{C}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad$ генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Выход

$b \in \mathcal{C}_n$, такая что $d(P_a, P_b) \leqslant k$.

Алгоритм

1. $b \leftarrow a$.
2. k раз выбрать случайно $i \in \{1, \ldots, n\}$ и записать в b_i случайное число от 1 до n.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad k = 3$

$b = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad i = 2 \qquad r = 3$

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм мутации раскрасок

Вход

$a \in \mathcal{C}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad$ генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Выход

$b \in \mathcal{C}_n$, такая что $d(P_a, P_b) \leqslant k$.

Алгоритм

1. $b \leftarrow a$.
2. k раз выбрать случайно $i \in \{1, \dots, n\}$ и записать в b_i случайное число от 1 до n.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad k = 3$
$b = (1, 3, 1, 1, 2, 3) \quad i = 2 \qquad r = 3$

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм мутации раскрасок

Вход

$a \in \mathcal{C}_n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Выход

$b \in \mathcal{C}_n$, такая что $d(P_a, P_b) \leqslant k$.

Алгоритм

1. $b \leftarrow a$.
2. k раз выбрать случайно $i \in \{1, \ldots, n\}$ и записать в b_i случайное число от 1 до n.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 2, 3)$ $k = 3$
$b = (1, 3, 1, 1, 2, 3)$ $i = 2, 4$ $r = 3, 5$

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм мутации раскрасок

Вход

$a \in \mathcal{C}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad$ генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Выход

$b \in \mathcal{C}_n$, такая что $d(P_a, P_b) \leqslant k$.

Алгоритм

1. $b \leftarrow a$.
2. k раз выбрать случайно $i \in \{1, \dots, n\}$ и записать в b_i случайное число от 1 до n.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad k = 3$
$b = (1, 3, 1, 5, 2, 3) \quad i = 2, 4 \qquad r = 3, 5$

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм мутации раскрасок

Вход

$a \in \mathcal{C}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad$ генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Выход

$b \in \mathcal{C}_n$, такая что $d(P_a, P_b) \leqslant k$.

Алгоритм

1. $b \leftarrow a$.
2. k раз выбрать случайно $i \in \{1, \ldots, n\}$ и записать в b_i случайное число от 1 до n.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad k = 3$
$b = (1, 3, 1, 5, 2, 3) \quad i = 2, 4, 2 \quad r = 3, 5, 1$

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм мутации раскрасок

Вход

$a \in \mathcal{C}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad$ генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Выход

$b \in \mathcal{C}_n$, такая что $d(P_a, P_b) \leqslant k$.

Алгоритм

1. $b \leftarrow a$.
2. k раз выбрать случайно $i \in \{1, \ldots, n\}$ и записать в b_i случайное число от 1 до n.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad k = 3$
$b = (1, 1, 1, 5, 2, 3) \quad i = 2, 4, 2 \quad r = 3, 5, 1$

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм мутации раскрасок

Вход

$a \in \mathcal{C}_n, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad$ генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ).

Выход

$b \in \mathcal{C}_n$, такая что $d(P_a, P_b) \leqslant k$.

Алгоритм

1. $b \leftarrow a$.
2. k раз выбрать случайно $i \in \{1, \ldots, n\}$ и записать в b_i случайное число от 1 до n.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 2, 3) \quad k = 3$
$b = (1, 1, 1, 5, 2, 3) \quad i = 2, 4, 2 \quad r = 3, 5, 1$

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм однородного скрещивания раскрасок

Вход

$a, b \in \mathcal{C}_n$, вещественное число $p \in [0, 1]$, ГПСЧ.

Выход

$s, t \in \mathcal{C}_n$.

Алгоритм

1. $s \leftarrow a$, $t \leftarrow b$.
2. Для каждого $i = 1, \dots, n$ создать случайное вещественное число $\hat{p} \in [0, 1]$ и в случае $\hat{p} < p$ поменять местами гены $s[i]$ и $t[i]$.

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм однородного скрещивания раскрасок

Вход

$a, b \in \mathcal{C}_n$, вещественное число $p \in [0, 1]$, ГПСЧ.

Выход

$s, t \in \mathcal{C}_n$.

Алгоритм

1. $s \leftarrow a$, $t \leftarrow b$.
2. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ создать случайное вещественное число $\hat{p} \in [0, 1]$ и в случае $\hat{p} < p$ поменять местами гены $s[i]$ и $t[i]$.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 3, 1)$ $\quad s = (2, 2, 1, 5, 2, 1)$

$b = (2, 1, 3, 5, 2, 3)$ $\quad t = (1, 1, 3, 1, 3, 3)$

Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

Алгоритм однородного скрещивания раскрасок

Вход

$a, b \in \mathcal{C}_n$, вещественное число $p \in [0, 1]$, ГПСЧ.

Выход

$s, t \in \mathcal{C}_n$.

Алгоритм

1. $s \leftarrow a$, $t \leftarrow b$.
2. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ создать случайное вещественное число $\hat{p} \in [0, 1]$ и в случае $\hat{p} < p$ поменять местами гены $s[i]$ и $t[i]$.

Пример

$a = (1, 2, 1, 1, 3, 1)$ $\quad s = (2, 2, 1, 5, 2, 1)$

$b = (2, 1, 3, 5, 2, 3)$ $\quad t = (1, 1, 3, 1, 3, 3)$

Свойство

$$d_H(a, s) + d_H(s, b) = d_H(a, b), \qquad d_H(a, t) + d_H(t, b) = d_H(a, b).$$

План доклада

Геометрическое и устойчивое скрещивание

Пусть (X, d) — метрическое пространство,
(Ω, μ) — вероятностное пространство.

Определение геометрического скрещивания Moraglio & Poli

Скрещивание $f \colon X \times X \times \Omega \to X$ называется геометрическим, если для любых $a, b \in X$ и $\omega \in \Omega$ элемент $c = f(a, b, \omega)$ удовлетворяет соотношению

$$d(a, c) + d(c, b) = d(a, b).$$

Определение α-устойчивого скрещивания

Пусть $\alpha \geqslant 1$. Будем говорить, что скрещивание $f \colon X \times X \times \Omega \to X$ является α-устойчивым, если для любых $a, b \in X$ и $\omega \in \Omega$ элемент $c = f(a, b, \omega)$ удовлетворяет неравенству

$$d(a, c) + d(c, b) \leqslant \alpha d(a, b).$$

План доклада

Сведéние к задаче о назначении

Схема сведéния

Сведение к задаче о назначении

Задача о наилучшем соответствии между раскрасками

Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Найти: перестановку $\varphi \in S_n$, такую что $d(P_a, P_b) = d_H(\varphi \circ a, b)$.

Сведение к задаче о назначении

Задача о наилучшем соответствии между раскрасками

Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Найти: перестановку $\varphi \in S_n$, такую что $d(P_a, P_b) = d_H(\varphi \circ a, b)$.

Задача вычисления расстояния между разбиениями

Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Найти: $d(P_a, P_b)$.

Сведение к задаче о назначении

Задача о наилучшем соответствии между раскрасками

Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Найти: перестановку $\varphi \in S_n$, такую что $d(P_a, P_b) = d_H(\varphi \circ a, b)$.

Задача вычисления расстояния между разбиениями

Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Найти: $d(P_a, P_b)$.

Задача о геометрическом скрещивании разбиениий

Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Найти: $c \in \mathcal{C}_n$, такую что $d(P_a, P_c) + d(P_c, P_b) = d(P_a, P_b)$.

Сведение к задаче о назначении

Задача о наилучшем соответствии между раскрасками

Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Найти: перестановку $\varphi \in S_n$, такую что $d(P_a, P_b) = d_H(\varphi \circ a, b)$.

Задача вычисления расстояния между разбиениями

Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Найти: $d(P_a, P_b)$.

Задача о геометрическом скрещивании разбиениий

Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Найти: $c \in \mathcal{C}_n$, такую что $d(P_a, P_c) + d(P_c, P_b) = d(P_a, P_b)$.

Замечание

Очевидно, что задача о расстоянии сводится к задаче о наилучшем соответствии.

Сведение к задаче о назначении

Под задачей о назначении будем понимать задачу о нахождении максимального паросочетания во взвешенном двудольном графе.

Задача о назначении

Дано: двудольный граф $G = (X, Y, E, w)$, где
X, Y — доли графа,
$E \subset X \times Y$ — множество дуг,
$w : E \to \mathbb{Z}_+$ — весовая функция.

Найти: паросочетание M в G, такое что величина
$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ максимальна.

Определение паросочетания

Паросочетанием называется такое множество $M \subset E$, что для любых различных дуг (x_1, y_1) и (x_2, y_2) из M справедливо: $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Сведение к задаче о назначении

Взвешенный двудольный граф для двух раскрасок

Задача построения взвешенного двудольного графа для двух раскрасок

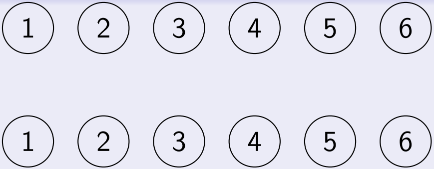
Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Построить: взвешенный двудольный граф $G_{a,b} = (X, Y, E, w)$, где

$$X = \{1, \dots, n\}, \quad Y = \{1, \dots, n\},$$
$$E = \{(a_i, b_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$w(k, l) = |a^{-1}(k) \cap b^{-1}(l)|, \quad (k, l) \in E.$$

Пример

$$a = (1, 1, 2, 1, 3, 2)$$
$$b = (3, 1, 4, 1, 2, 4)$$



Сведение к задаче о назначении

Взвешенный двудольный граф для двух раскрасок

Задача построения взвешенного двудольного графа для двух раскрасок

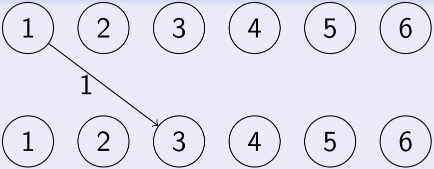
Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Построить: взвешенный двудольный граф $G_{a,b} = (X, Y, E, w)$, где

$$X = \{1, \ldots, n\}, \quad Y = \{1, \ldots, n\},$$
$$E = \{(a_i, b_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$w(k, l) = |a^{-1}(k) \cap b^{-1}(l)|, \quad (k, l) \in E.$$

Пример

$$a = (1, 1, 2, 1, 3, 2)$$
$$b = (3, 1, 4, 1, 2, 4)$$



Сведение к задаче о назначении

Взвешенный двудольный граф для двух раскрасок

Задача построения взвешенного двудольного графа для двух раскрасок

Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

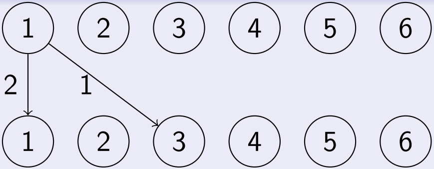
Построить: взвешенный двудольный граф $G_{a,b} = (X, Y, E, w)$, где

$$X = \{1, \ldots, n\}, \quad Y = \{1, \ldots, n\},$$
$$E = \{(a_i, b_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$w(k, l) = |a^{-1}(k) \cap b^{-1}(l)|, \quad (k, l) \in E.$$

Пример

$a = (1, 1, 2, 1, 3, 2)$

$b = (3, 1, 4, 1, 2, 4)$



Сведение к задаче о назначении

Взвешенный двудольный граф для двух раскрасок

Задача построения взвешенного двудольного графа для двух раскрасок

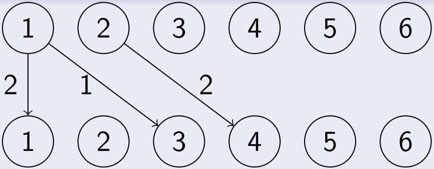
Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Построить: взвешенный двудольный граф $G_{a,b} = (X, Y, E, w)$, где

$$X = \{1, \ldots, n\}, \quad Y = \{1, \ldots, n\},$$
$$E = \{(a_i, b_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$w(k, l) = |a^{-1}(k) \cap b^{-1}(l)|, \quad (k, l) \in E.$$

Пример

$$a = (1, 1, \color{red}{2}, 1, 3, \color{red}{2})$$
$$b = (3, 1, \color{red}{4}, 1, 2, \color{red}{4})$$



Сведение к задаче о назначении

Взвешенный двудольный граф для двух раскрасок

Задача построения взвешенного двудольного графа для двух раскрасок

Дано: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

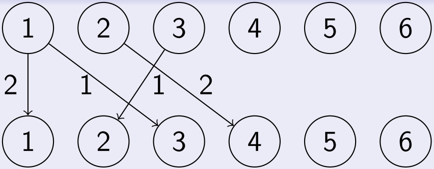
Построить: взвешенный двудольный граф $G_{a,b} = (X, Y, E, w)$, где

$$X = \{1, \ldots, n\}, \quad Y = \{1, \ldots, n\},$$
$$E = \{(a_i, b_i) : 1 \leqslant i \leqslant n\},$$
$$w(k, l) = |a^{-1}(k) \cap b^{-1}(l)|, \quad (k, l) \in E.$$

Пример

$a = (1, 1, 2, 1, 3, 2)$

$b = (3, 1, 4, 1, 2, 4)$



Сведение к задаче о назначении

Алгоритм создания двудольного взвешенного графа для двух раскрасок

Вход

$a, b \in \mathcal{C}_n$.

Выход

$G_{a,b}$ в виде массива T троек (вес дуги, начало, конец).

Алгоритм

1. $Pairs \leftarrow ((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$.
2. Отсортировать элементы массива *Pairs* лексикографически в порядке возрастания (одинаковые пары окажутся рядом).
3. $T \leftarrow \varnothing$.
4. Последовательно для каждой пары (a_k, b_k), имеющейся в массиве *Pairs*, найти количество w_k её вхождений в массив *Pairs*, сформировать тройку (w_k, a_k, b_k) и добавить в T.

Сложность $O(n \log n)$.

Сведение к задаче о назначении

Алгоритм построения перестановки по паросочетанию

Задача построения перестановки по паросочетанию

Дано: $M = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_s, y_s)\}$ — паросочетание в двудольном графе $G = (X, Y, E, w)$, где $|X| = |Y| = n$ и $1 \leqslant s \leqslant |E|$.

Построить: перестановку $\varphi \in S_n$, соответствующую M, т. е. такую что $M = \{(i, \varphi(i)) \colon \quad i = 1, \ldots, n, \quad (i, \varphi(i)) \in E\}$.

Задача построения перестановки по паросочетанию

Дано: $M = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_s, y_s)\}$ — паросочетание в двудольном графе $G = (X, Y, E, w)$, где $|X| = |Y| = n$ и $1 \leqslant s \leqslant |E|$.

Построить: перестановку $\varphi \in S_n$, соответствующую M, т. е. такую что $M = \{(i, \varphi(i)) : \quad i = 1, \ldots, n, \quad (i, \varphi(i)) \in E\}$.

Пример

$n = 5$

$M = \{(1,3), (2,5), (4,1)\}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$A = \{1, 2, 5\}, \; B = \{3, 5, 1\}$

Построение

1. Сформировать множества $A = \{x_1, \ldots, x_s\}, \quad B = \{y_1, \ldots, y_s\}$.
2. Определить φ на A: $\varphi(x_i) = y_i$ для $i = 1, \ldots, s$.
3. Определить φ на всём множестве X: элементам из $X \setminus A$ биективно сопоставить элементы из $Y \setminus B$.

Сведение к задаче о назначении

Алгоритм построения перестановки по паросочетанию

Задача построения перестановки по паросочетанию

Дано: $M = \{(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s)\}$ — паросочетание в двудольном графе $G = (X, Y, E, w)$, где $|X| = |Y| = n$ и $1 \leqslant s \leqslant |E|$.

Построить: перестановку $\varphi \in S_n$, соответствующую M, т. е. такую что $M = \{(i, \varphi(i)) : \quad i = 1, \dots, n, \quad (i, \varphi(i)) \in E\}$.

Пример

$n = 5$

$M = \{(1, 3), (2, 5), (4, 1)\}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & & & & \\ 3 & & & & \end{pmatrix}$$

$A = \{1, 2, 5\}, \ B = \{3, 5, 1\}$

Построение

1. Сформировать множества $A = \{x_1, \dots, x_s\}, \quad B = \{y_1, \dots, y_s\}$.
2. Определить φ на A: $\varphi(x_i) = y_i$ для $i = 1, \dots, s$.
3. Определить φ на всём множестве X: элементам из $X \setminus A$ биективно сопоставить элементы из $Y \setminus B$.

Сведение к задаче о назначении

Алгоритм построения перестановки по паросочетанию

Задача построения перестановки по паросочетанию

Дано: $M = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_s, y_s)\}$ — паросочетание в двудольном графе $G = (X, Y, E, w)$, где $|X| = |Y| = n$ и $1 \leqslant s \leqslant |E|$.

Построить: перестановку $\varphi \in S_n$, соответствующую M, т. е. такую что $M = \{(i, \varphi(i)) : \quad i = 1, \ldots, n, \quad (i, \varphi(i)) \in E\}$.

Пример

$n = 5$

$M = \{(1,3), (2,5), (4,1)\}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & & & \\ 3 & 5 & & & \end{pmatrix}$$

$A = \{1, 2, 5\}, \; B = \{3, 5, 1\}$

Построение

1. Сформировать множества $A = \{x_1, \ldots, x_s\}, \quad B = \{y_1, \ldots, y_s\}$.
2. Определить φ на A: $\varphi(x_i) = y_i$ для $i = 1, \ldots, s$.
3. Определить φ на всём множестве X: элементам из $X \setminus A$ биективно сопоставить элементы из $Y \setminus B$.

Сведение к задаче о назначении

Алгоритм построения перестановки по паросочетанию

Задача построения перестановки по паросочетанию

Дано: $M = \{(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s)\}$ — паросочетание в двудольном графе $G = (X, Y, E, w)$, где $|X| = |Y| = n$ и $1 \leqslant s \leqslant |E|$.

Построить: перестановку $\varphi \in S_n$, соответствующую M, т. е. такую что $M = \{(i, \varphi(i)) \colon \quad i = 1, \dots, n, \quad (i, \varphi(i)) \in E\}$.

Пример

$n = 5$

$M = \{(1,3), (2,5), (4,1)\}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 3 & 5 & & 1 & \end{pmatrix}$$

$A = \{1, 2, 5\}, \ B = \{3, 5, 1\}$

Построение

1. Сформировать множества
   $A = \{x_1, \dots, x_s\}, \quad B = \{y_1, \dots, y_s\}$.
2. Определить φ на A:
   $\varphi(x_i) = y_i$ для $i = 1, \dots, s$.
3. Определить φ на всём множестве X: элементам из $X \setminus A$ биективно сопоставить элементы из $Y \setminus B$.

Сведение к задаче о назначении

Алгоритм построения перестановки по паросочетанию

Задача построения перестановки по паросочетанию

Дано: $M = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_s, y_s)\}$ — паросочетание в двудольном графе $G = (X, Y, E, w)$, где $|X| = |Y| = n$ и $1 \leqslant s \leqslant |E|$.

Построить: перестановку $\varphi \in S_n$, соответствующую M, т. е. такую что $M = \{(i, \varphi(i)) : \quad i = 1, \ldots, n, \quad (i, \varphi(i)) \in E\}$.

Пример

$n = 5$

$M = \{(1,3), (2,5), (4,1)\}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 3 & 5 & 2 & 1 & \end{pmatrix}$$

$A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 5, 1\}$

Построение

1. Сформировать множества $A = \{x_1, \ldots, x_s\}, \quad B = \{y_1, \ldots, y_s\}$.
2. Определить φ на A: $\varphi(x_i) = y_i$ для $i = 1, \ldots, s$.
3. Определить φ на всём множестве X: элементам из $X \setminus A$ биективно сопоставить элементы из $Y \setminus B$.

Сведение к задаче о назначении

Алгоритм построения перестановки по паросочетанию

Задача построения перестановки по паросочетанию

Дано: $M = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_s, y_s)\}$ — паросочетание в двудольном графе $G = (X, Y, E, w)$, где $|X| = |Y| = n$ и $1 \leqslant s \leqslant |E|$.

Построить: перестановку $\varphi \in S_n$, соответствующую M, т. е. такую что $M = \{(i, \varphi(i)) \colon \quad i = 1, \ldots, n, \quad (i, \varphi(i)) \in E\}$.

Пример

$n = 5$

$M = \{(1, 3), (2, 5), (4, 1)\}$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$A = \{1, 2, 5\}, \ B = \{3, 5, 1\}$

Построение

1. Сформировать множества $A = \{x_1, \ldots, x_s\}, \quad B = \{y_1, \ldots, y_s\}$.
2. Определить φ на A: $\varphi(x_i) = y_i$ для $i = 1, \ldots, s$.
3. Определить φ на всём множестве X: элементам из $X \setminus A$ биективно сопоставить элементы из $Y \setminus B$.

Предложение

Пусть

$a, b \in \mathcal{C}_n$;
$G_{a,b} = (X, Y, E, w)$ — взвешенный двудольный граф для a и b;
M — максимальное паросочетание в $G_{a,b}$.

Тогда

$$d(P_a, P_b) = n - w(M)$$

и перестановка $\varphi \in S_n$, соответствующая паросочетанию M, является наилучшим соответствием между раскрасками a и b.

Имеющиеся алгоритмы для задачи о назначении

1. Kuhn & Munkres — $O(mn^2)$, где m — число дуг;
2. Edmonds & Karp — $O(mn \log n)$;
3. Gabow & Tarjan — $O(mn^{\frac{1}{2}} \log nU)$, где U — наибольший вес.

Сведение к задаче о назначении

Алгоритм геометрического скрещивания разбиений

Вход

$a, b \in \mathcal{C}_n$ — родители, $p \in [0, 1]$, ГПСЧ.

Выход

$s, t \in \mathcal{C}_n$ — потомки.

Алгоритм

1. Найти наилучшее соответствие φ между раскрасками a и b.
2. Изменить раскраску a согласно найденному соответствию: $\tilde{a} \leftarrow \varphi \circ a$.
3. Применить однородное скрещивание к $\tilde{a}$ и b с вероятностью p и получить потомков s и t.

Свойство

Такое скрещивание разбиений является геометрическим, то есть для потомков s и t выполняются равенства:
$d(P_a, P_s) + d(P_s, P_b) = d(P_a, P_b)$ и $d(P_a, P_t) + d(P_t, P_b) = d(P_a, P_b)$.

План доклада

1. Введение
2. Разбиения множеств и раскраски
   - Разбиения множеств
   - Хранение разбиений в виде кортежей («раскрасок»)
   - Расстояние между разбиениями
   - Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок
3. Геометрическое и устойчивое скрещивания разбиений
   - Геометрическое и устойчивое скрещивания
   - Сведение к задаче о назначении
   - Жадный алгоритм
   - Свойства жадного алгоритма
4. Применение в генетических алгоритмах
   - Опробованные эволюционные схемы
   - Экспериментальные результаты

Жадный алгоритм

Для задачи о назначении

Вход: $n \in \mathbb{Z}_+$ (количество вершин в бóльшей доле графа), взвешенный двудольный граф в виде массива троек $(w(x,y),x,y)$, где $1 \leqslant x,y \leqslant n$ и $w(x,y)$ — вес дуги (x,y).

Выход: M — паросочетание.

Алгоритм

1. Отсортировать массив троек в порядке убывания весов.
2. $L \leftarrow (\underbrace{0,\ldots,0}_{n})$, $R \leftarrow (\underbrace{0,\ldots,0}_{n})$, $M \leftarrow \varnothing$.

   ($L[x]$ — такая вершина y, что $(x,y) \in M$; если $L[x] = 0$, то такой вершины нет (аналогично для $R[y]$).)
3. Для каждой тройки $(w(x,y),x,y)$ проделать следующее: если $L[x] = 0$ и $R[y] = 0$, то $L[x] \leftarrow y$, $R[y] \leftarrow x$ и $M \leftarrow M \cup \{(x,y)\}$.

Жадный алгоритм

Для задачи о наилучшем соответствии между раскрасками

Вход: $a, b \in \mathcal{C}_n$.

Выход: φ — перестановка.

Алгоритм

1. Создать взвешенный двудольный граф $G_{a,b}$ в виде массива троек (вес, начало дуги, конец дуги) для раскрасок a и b.
2. Найти с помощью жадного алгоритма паросочетание M в $G_{a,b}$.
3. Построить перестановку φ, соответствующую паросочетанию M.

План доклада

1. Введение

2. Разбиения множеств и раскраски
   - Разбиения множеств
   - Хранение разбиений в виде кортежей («раскрасок»)
   - Расстояние между разбиениями
   - Простые алгоритмы мутации и скрещивания раскрасок

3. Геометрическое и устойчивое скрещивания разбиений
   - Геометрическое и устойчивое скрещивания
   - Сведение к задаче о назначении
   - Жадный алгоритм
   - Свойства жадного алгоритма

4. Применение в генетических алгоритмах
   - Опробованные эволюционные схемы
   - Экспериментальные результаты

Свойства жадного алгоритма

Лемма о доминирующей дуге

Лемма

Пусть $G = (X, Y, E, w)$ — взвешенный двудольный граф,
N — паросочетание, найденное жадным алгоритмом.
Тогда для любой дуги $(x, y) \in E$ во множестве

$$N_{x,y} \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, v) \in N\colon \quad u = x \quad \vee \quad v = y\}$$

найдётся такая дуга (x_1, y_1), что $w(x_1, y_1) \geqslant w(x, y)$.

Свойства жадного алгоритма

Оценка для веса паросочетания

Предложение

Пусть

$$G = (X, Y, E, w) \text{ — взвешенный двудольный граф,}$$
$$N \text{ — паросочетание, найденное жадным алгоритмом,}$$
$$M \text{ — максимальное паросочетание в } G.$$

Тогда

$$w(M) \leqslant 2w(N).$$

Идея доказательства

Доказательство основано на лемме о доминирующей дуге.
Множитель 2 появляется из-за того, что двум дугам из M может соответствовать одна дуга из N.

Свойства жадного алгоритма

Оценка для расстояния между разбиениями

Предложение

Пусть

$P, Q \in \mathcal{P}_n$,

$d(P, Q)$ — расстояние между P и Q,

$d_g(P, Q)$ — приближённое расстояние между P и Q, найденное жадным алгоритмом.

Тогда

$$d_g(P, Q) \leqslant 2d(P, Q).$$

Идея доказательства

Доказательство основано на лемме о доминирующей дуге и на формуле, которая выражает расстояние между разбиениями через вес максимального паросочетания.

Свойства жадного алгоритма

Результаты жадного алгоритма для расстояния между разбиениями из $\mathcal{P}_7$

Таблица результатов для $n = 7$ ($|\mathcal{P}_7| = 877$)

$d_g \backslash d$	1	2	3	4	5	6
1	9 093					
2	525	63 854				
3		9 569	157 100			
4		245	36 671	90 486		
5			1 074	11 476	4 001	
6					31	1

Жадный алгоритм устойчивого скрещивания разбиений

Вход

$a, b \in \mathcal{C}_n$, вещественное число $p \in [0, 1]$, ГПСЧ.

Выход

$s, t \in \mathcal{C}_n$.

Алгоритм

1. Найти соответствие φ между раскрасками a и b с помощью жадного алгоритма.
2. Изменить раскраску a согласно найденному соответствию: $\tilde{a} \leftarrow \varphi \circ a$.
3. Применить однородное скрещивание к $\tilde{a}$ и b с вероятностью p и получить потомков s и t.

Свойство

$d(P_a, P_s) + d(P_s, P_b) \leqslant 2d(P_a, P_b)$ и $d(P_a, P_t) + d(P_t, P_b) \leqslant 2d(P_a, P_b)$

План доклада

Случайное порождение, эволюция с мутацией

Схема случайного порождения (СП)

Случайное порождение упорядоченных раскрасок и выбор наилучшей.

Алгоритм случайного порождения упорядоченной раскраски

Вход: $n \in \mathbb{Z}_+$, ГПСЧ.

Выход: упорядоченная раскраска $a \in \mathcal{C}_n$.

1. $a \leftarrow (1, 0, \ldots, 0)$.
2. Для $i = 2, \ldots, n$: $mc \leftarrow \max(c_1, \ldots, c_{i-1}) + 1$;
   $a[i] \leftarrow$ случайное число из $\{1, \ldots, mc\}$.

Схема эволюции с мутацией (M)

1. Мутация.
2. Отбор усечением.

Эволюция с мутацией и скрещиванием

Схема с устойчивым скрещиванием (УС)

1. Устойчивое скрещивание, родители выбираются с помощью рулетки.
2. Мутация.
3. Отбор усечением.

Схема с тривиальным скрещиванием (ТС)

1. Однородное скрещивание раскрасок, родители выбираются с помощью рулетки.
2. Мутация.
3. Отбор усечением.

План доклада

Задача о разбиении графа с минимизацией связей между долями и несвязей внутри долей

Задача

Дано: неориентированный граф $G = (V, E)$.

Найти: разбиение P множества вершин V (число долей не фиксируется), такое что величина $B(V, E, P) + 2C(V, E, P)$ минимальна.

Величина $B(V, E, P)$ соответсвует числу отсутствующих связей внути долей:

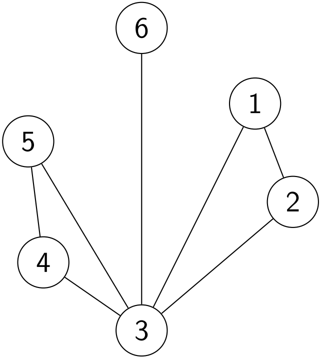
$$B(V, E, P) = |\{(i, j) \colon (i, j) \notin E \wedge i \overset{P}{\sim} j\}|.$$

Величина $C(V, E, P)$ соответствует числу связей между долями:

$$C(V, E, P) = |\{(i, j) \colon (i, j) \in E \wedge i \overset{P}{\nsim} j\}|.$$

Задача о наилучшем разбиении графа

Пример

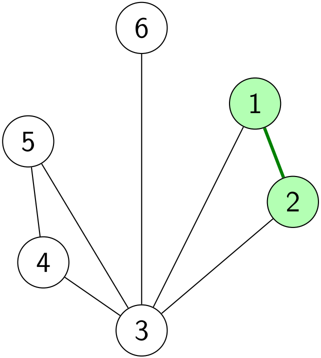


$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B =$
$C =$
$B + 2C =$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B =$
$C =$
$B + 2C =$

Задача о наилучшем разбиении графа

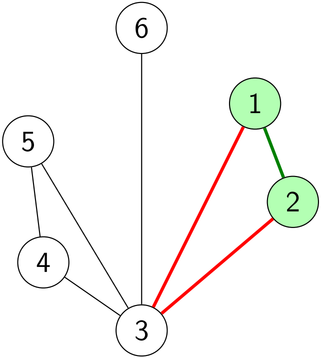
Пример



$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B =$
$C =$
$B + 2C =$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B =$
$C =$
$B + 2C =$

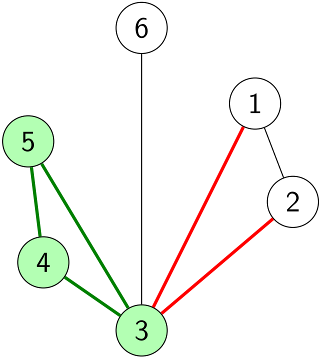
Задача о наилучшем разбиении графа
Пример



$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B = 0$
$C = 2$
$B + 2C =$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B =$
$C =$
$B + 2C =$

Задача о наилучшем разбиении графа
Пример

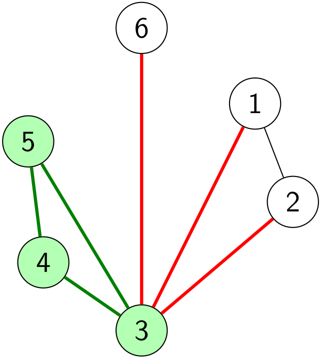


$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B=0$
$C=2$
$B+2C=$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B=$
$C=$
$B+2C=$

Задача о наилучшем разбиении графа

Пример

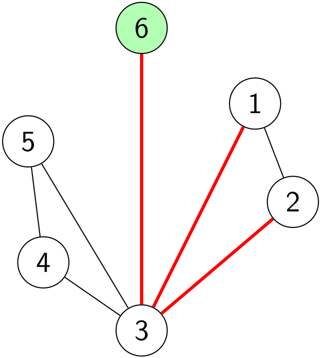


$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B = 0 + 0$
$C = 2 + 1$
$B + 2C =$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B =$
$C =$
$B + 2C =$

Задача о наилучшем разбиении графа

Пример

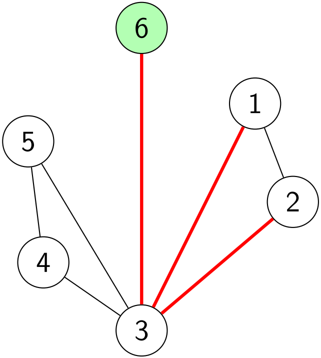


$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B = 0 + 0$
$C = 2 + 1$
$B + 2C =$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B =$
$C =$
$B + 2C =$

Задача о наилучшем разбиении графа

Пример

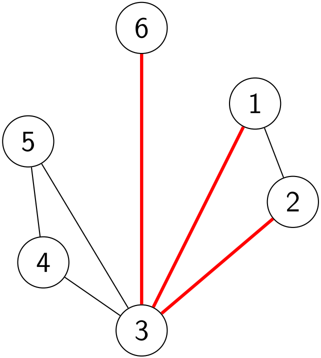


$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B = 0+0+0$
$C = 2+1+0$
$B+2C =$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B =$
$C =$
$B+2C =$

Задача о наилучшем разбиении графа

Пример

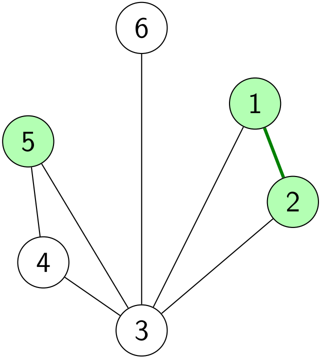


$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B = 0+0+0 = 0$
$C = 2+1+0 = 3$
$B+2C = 0+2\cdot 3 = 6$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B =$
$C =$
$B+2C =$

Задача о наилучшем разбиении графа

Пример

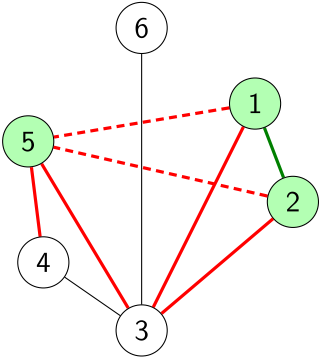


$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B = 0+0+0 = 0$
$C = 2+1+0 = 3$
$B+2C = 0+2\cdot 3 = 6$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B =$
$C =$
$B+2C =$

Задача о наилучшем разбиении графа

Пример

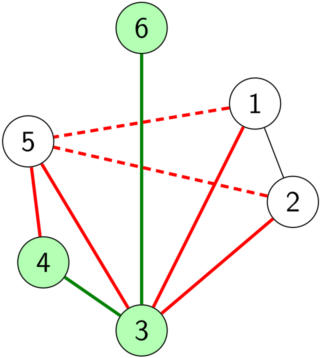


$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B = 0 + 0 + 0 = 0$
$C = 2 + 1 + 0 = 3$
$B + 2C = 0 + 2 \cdot 3 = 6$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B = 2$
$C = 4$
$B + 2C =$

Задача о наилучшем разбиении графа

Пример

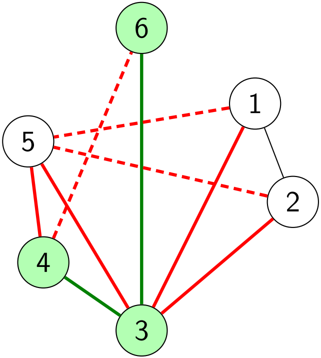


$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B = 0+0+0 = 0$
$C = 2+1+0 = 3$
$B+2C = 0+2\cdot 3 = 6$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B = 2$
$C = 4$
$B+2C =$

Задача о наилучшем разбиении графа

Пример

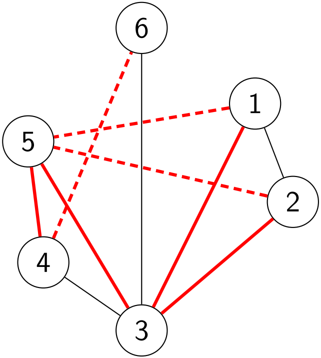


$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B = 0+0+0 = 0$
$C = 2+1+0 = 3$
$B + 2C = 0 + 2\cdot 3 = 6$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B = 2+1$
$C = 4+0$
$B + 2C =$

Задача о наилучшем разбиении графа

Пример



$\{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6\}\}$
$B = 0 + 0 + 0 = 0$
$C = 2 + 1 + 0 = 3$
$B + 2C = 0 + 2 \cdot 3 = 6$

$\{\{1,2,5\},\{3,4,6\}\}$
$B = 2 + 1 = 3$
$C = 4 + 0 = 4$
$B + 2C = 3 + 2 \cdot 4 = 11$

Задача о составлении максимального числа комплектов

Задача

Дано: множество X из n элементов,
для каждого элемента $x \in X$ задано m неотрицательных чисел $w_1(x)$, $w_2(x)$, ..., $w_m(x)$,
для каждого $j \in \{1, \ldots, m\}$ задано неотрицательное целое число b_j.

Найти: максимальное число попарно непересекающихся комплектов в X, т. е. подмножеств $Y \subset X$, обладающих свойством:

$$\sum_{x \in Y} w_j(x) = b_j, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Параметры тестирования

Объекты тестирования

Схемы УС, ТС, М, СП в генетических алгоритмах для задачи о наилучшем разбиении графа и задачи о комплектах.

Параметры тестирования

Размер популяции	Вер-ть скрещивания	Вер-ть мутации
$n + 10$	0.6	0.1

n — число вершин в графе или число элементов в множестве.

Сравение проводилось так, чтобы число создаваемых особей в каждой из тестируемых эволюционных схем было примерно одинаковым.

Результаты для задачи о наилучшем разбиении графа

Задача

Дано: неориентированный граф $G = (V, E)$.

Найти: разбиение P вершин V: $B(V, E, P) + 2C(V, E, P) \to \min$.

Таблица результатов

Схема	$\|V\| = 17$	Время	$\|V\| = 20$	Время	$\|V\| = 50$	Время
УС	73,6 (62)	0,18 с	65,9	0,28 с	612,8	3,76 с
ТС	82,2 (62)	0,16 с	67,8	0,24 с	622,7	4,37 с
М	102,5 (62)	0,19 с	81,2	0,31 с	666,8	4,76 с
СП	79,8 (62)	0,05 с	80,8	0,09 с	672,3	2,47 с
СП	77,2 (62)	0,19 с	80,3	0,28 с	672,3	3,77 с

Результаты для задачи о комплектах

Задача

Дано: X из n элементов,
$w_1(x), w_2(x), \ldots, w_m(x) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ для каждого $x \in X$,
$b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Найти: максимальное число комплектов в X.

Таблица результатов

Схема	$n = 17$	Время	$n = 20$	Время	$n = 50$	Время
УС	4,5	0,18 с	5,8	0,28 с	12,2	2,79 с
ТС	4,3	0,18 с	5,6	0,27 с	9,9	2,95 с
М	3	0,21 с	4,5	0,34 с	6,2	4,11 с
СП	3	0,23 с	3,2	0,35 с	3	2,98 с

Источники

Википедия, свободная энциклопедия. http://en.wikipedia.org и http://ru.wikipedia.org.

Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: «Мир», 1982.

L. Denoeud et A. Guenoche, Distance des transferts entre partitions. — 5 p.

L. Denoeud, H. Garreta and A. Guenoche, Comparison of distancce indices between partitions. — 9 p.

H. A. Baier Saip, C. L. Lucchesi, Matching algorithms for bipartite graphs. — Relatório Técnico DCC — 03/93.