Примеры построения базисов в сумме и пересечении подпространств

Даны подпространства L_1 и L_2. Задание:
(1) Найти базис и размерность $L_1 + L_2$.
(2) Описать L_1 и L_2 системами линейных уравнений и сделать проверки. Найти размерности L_1 и L_2.
(3) Найти базис $L_1 \cap L_2$ и сделать проверку.
(4) Проверить, что $\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$.
(5) Дополнить найденный базис $L_1 \cap L_2$ до базисов в L_1, L_2 и $L_1 + L_2$.

Пример А. Пусть $L_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $L_2 = \ell(b_1, b_2)$, где

$$a_1 = (4, -7, 3, 5)^\tau, \quad a_2 = (1, -1, 0, -4)^\tau, \quad a_3 = (3, -5, 2, 2)^\tau;$$
$$b_1 = (-5, 3, 2, -5)^\tau, \quad b_2 = (-3, -1, 4, 1)^\tau.$$

$\boxed{\text{A1}}$ Найдём базис $L_1 + L_2$ как базисную подсистему a_1, a_2, a_3, b_1, b_2.

$$\begin{pmatrix} 4 & \boxed{1} & 3 & -5 & -3 \\ -7 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & -4 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & -5 & -3 \\ -3 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & \boxed{2} & 2 & 4 \\ 21 & 0 & 14 & -35 & -14 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -49 & -42 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_4/(-42) \\ C_3 - 2C_4 \\ C_1 + 9C_4}}{\sim} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7/6 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Ответ</u>: a_2, a_3, b_2 — базис в $L_1 + L_2$, $\dim(L_1 + L_2) = 3$.

$a_1 = (-1/2)a_2 + (3/2)a_3$, $b_1 = (5/2)a_2 - (4/3)a_3 + (7/6)b_2$.

<u>Проверка</u>:

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/2 \\ -15/2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{6}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -5/2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 20/3 \\ -8/3 \\ -8/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/2 \\ -7/6 \\ 14/3 \\ 7/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{A2}}$ Найдём систему уравнений, которая задаёт L_1.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 3 & x_1 \\ -7 & -1 & -5 & x_2 \\ 3 & 0 & 2 & x_3 \\ 5 & -4 & 2 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2+C_1 \\ C_4+4C_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 3 & x_1 \\ -3 & 0 & -2 & x_1+x_2 \\ 3 & 0 & 2 & x_3 \\ 21 & 0 & 14 & 4x_1+x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2+C_3 \\ C_4-7C_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 1 & 3 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1+x_2+x_3 \\ 3 & 0 & 2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 4x_1-7x_3+x_4 \end{array}\right).$$

<u>Ответ</u>: $L_1\colon \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ 4x_1-7x_3+x_4=0; \end{cases} \qquad \dim L_1 = r(a_1,a_2,a_3)=2.$

<u>Проверка</u>:

$$a_1\in L_1\colon \begin{array}{l} 4-7+3+0=0, \\ 16+0-21+5=0; \end{array} \qquad a_2\in L_1\colon \begin{array}{l} 1-1+0+0=0, \\ 4+0+0-4=0; \end{array}$$

$$a_3\in L_1\colon \begin{array}{l} 3-5+2+0=0, \\ 12+0-14+2=0. \end{array}$$

Найдём систему уравнений, которая задаёт L_2:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -5 & -3 & x_1 \\ 3 & -1 & x_2 \\ 2 & 4 & x_3 \\ -5 & 1 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1-3C_2 \\ C_3+4C_2 \\ C_5+C_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{rr|r} -14 & 0 & x_1-3x_2 \\ 3 & -1 & x_2 \\ 14 & 0 & 4x_2+x_3 \\ -2 & 0 & x_2+x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1-7C_4 \\ C_3+7C_4 \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 0 & 0 & x_1-10x_2-7x_4 \\ 3 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & 11x_2+x_3+7x_4 \\ -2 & 0 & x_2+x_4 \end{array}\right).$$

<u>Ответ</u>: $L_2\colon \begin{cases} x_1-10x_2-7x_4=0, \\ 11x_2+x_3+7x_4=0. \end{cases} \qquad \dim L_2 = r(b_1,b_2)=2.$

<u>Проверка</u>:

$$b_1\in L_2\colon \begin{array}{l} -5-30+0+35=0, \\ 0+33+2-35=0; \end{array} \qquad b_2\in L_2\colon \begin{array}{l} -3+10+0-7=0, \\ 0-11+4+7=0. \end{array}$$

$\boxed{\text{A3}}$ Найдём базис $L_1 \cap L_2$. Запишем одну систему все уравнения, задающие L_1 и L_2, и решим полученную систему:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 1 \\ 1 & -10 & 0 & -7 \\ 0 & 11 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & 1 \\ 0 & -11 & -1 & -7 \\ 0 & 11 & \boxed{1} & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 & -7 \\ 0 & 117 & 0 & 78 \\ 0 & 11 & 1 & 7 \end{pmatrix} \overset{C_2/78}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 & -7 \\ 0 & 3/2 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 11 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выразим базисные переменные через свободную:

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2, \quad x_3 = -\frac{1}{2}x_2, \quad x_4 = -\frac{3}{2}x_2.$$

Подставим $x_2 = -2$ и получим ФСР из одного вектора:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: Базис $L_1 \cap L_2$: v, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$.

Проверка:

$$\begin{array}{ll} 1 - 2 + 1 + 0 = 0 & \checkmark \\ 4 + 0 - 7 + 3 = 0 & \checkmark \\ 1 + 20 + 0 - 21 = 0 & \checkmark \\ 0 - 22 + 1 + 21 = 0 & \checkmark \end{array}$$

$\boxed{\text{A4}}$ Проверим соотношение для размерностей:

$$\begin{array}{ccccccc} \dim(L_1 + L_2) & + & \dim(L_1 \cap L_2) & = & \dim L_1 & + & \dim L_2. \\ 3 & + & 1 & = & 2 & + & 2. \end{array}$$

$\boxed{\text{A5}}$ Дополним базис $L_1 \cap L_2$ до базисов в L_1, L_2 и $L_1 + L_2$.

Очевидно, v и a_1 лнз, поэтому v, a_1 — базис L_1.

Очевидно, v и b_1 лнз, поэтому v, b_1 — базис L_2.

Отсюда v, a_1, b_1 — базис $L_1 + L_2$.

Можно подойти к последнему заданию более серьёзно. Запишем векторы v, a_1, a_2, a_3 в виде столбцов и приведём к строчно псевдодиагональному виду, обязательно выбирая один из ведущих элементов в столбце v:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_2 + 2C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - 3C_1}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \end{array}\right) \overset{\substack{C_1 - 4C_2 \\ C_3 + C_2 \\ C_4 + 7C_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда v, a_1 — базис в L_1, $a_2 = -3v + a_1$, $a_3 = -v + a_1$.

Аналогично дополним базис $L_1 \cap L_2$ до базиса L_2:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -5 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда v, b_1 — базис в L_2, $b_2 = 2v + b_1$.

Пример B. $L_1 = \ell(a_1, a_2, a_3)$, $L_2 = \ell(b_1, b_2, b_3)$, где

$$\begin{array}{lll} a_1 = (7, 1, 3, -5)^\tau, & a_2 = (2, 0, 1, 4)^\tau, & a_3 = (-1, -2, 3, 1)^\tau, \\ b_1 = (2, -1, 3, 2)^\tau, & b_2 = (-1, -2, 1, -1)^\tau, & b_3 = (1, 1, -1, -3)^\tau. \end{array}$$

$\boxed{\text{B1}}$ Находим базис $L_1 + L_2$ как базисную подсистему $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & \boxed{1} & 3 & 3 & 1 & -1 \\ -5 & 4 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -4 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & \boxed{-1} & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & -1 \\ -17 & 0 & -11 & -10 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & \boxed{1} & 0 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & -3 & 0 & -5 & 2 \\ -27 & 0 & 9 & 0 & 15 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & -8 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-30} & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Ответ</u>: a_2, a_3, b_1, b_2 — базис $L_1 + L_2$, $\dim(L_1 + L_2) = 4$,
$a_1 = -3a_2 - 3a_3 + 5b_1$, $b_3 = -a_2 - a_3 + b_1$.

<u>Проверка</u>:

$$-3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix};$$

$$-\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{B2}}$ Опишем L_1 системой уравнений:

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 7 & 2 & -1 & x_1 \\ 1 & 0 & -2 & x_2 \\ 3 & \boxed{1} & 3 & x_3 \\ -5 & 4 & 1 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|l} \boxed{1} & 0 & -7 & x_1 - 2x_3 \\ 1 & 0 & -2 & x_2 \\ 3 & 1 & 3 & x_3 \\ -17 & 0 & -11 & x_4 - 4x_3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & -7 & x_1 - 2x_3 \\ 0 & 0 & 5 & -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 0 & 1 & 24 & -3x_1 + 7x_3 \\ 0 & 0 & -130 & 17x_1 - 38x_3 + x_4 \end{array}\right) \overset{\substack{C_4 + 26C_2 \\ C_2 \leftrightarrow C_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 0 & -7 & x_1 - 2x_3 \\ 0 & 1 & 24 & -3x_1 + 7x_3 \\ 0 & 0 & 5 & -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -9x_1 + 26x_2 + 14x_3 + x_4 \end{array}\right).$$

<u>Ответ</u>: $L_1\colon\ -9x_1 + 26x_2 + 14x_3 + x_4 = 0, \qquad \dim L_1 = 3.$

$$\begin{array}{lll} & a_1 \in L_1\colon & -63 + 26 + 42 - 5 = 0 \quad \checkmark \\ \underline{\text{Проверка}}: & a_2 \in L_1\colon & -18 + 0 + 14 + 4 = 0 \quad \checkmark \\ & a_3 \in L_1\colon & 9 - 52 + 42 + 1 = 0 \quad \checkmark \end{array}$$

Опишем L_2 системой уравнений:

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 2 & -1 & \boxed{1} & x_1 \\ -1 & -2 & 1 & x_2 \\ 3 & 1 & -1 & x_3 \\ 2 & -1 & -3 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|l} 2 & -1 & 1 & x_1 \\ -3 & -1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 5 & 0 & 0 & x_1 + x_3 \\ 8 & -4 & 0 & 3x_1 + x_4 \end{array}\right) \overset{C_4 - 4C_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|l} 2 & -1 & 1 & x_1 \\ -3 & -1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 5 & 0 & 0 & x_1 + x_3 \\ 20 & 0 & 0 & 7x_1 - 4x_2 + x_4 \end{array}\right) \overset{C_4 - 4C_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|l} 2 & -1 & 1 & x_1 \\ -3 & -1 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 5 & 0 & 0 & x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 \end{array}\right).$$

<u>Ответ</u>: $L_2\colon 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \qquad \dim L_2 = 3.$

$$\begin{array}{lll} & b_1 \in L_2\colon & 6 + 4 - 12 + 2 = 0 \quad \checkmark \\ \underline{\text{Проверка}}: & b_2 \in L_2\colon & -3 + 8 - 4 - 1 = 0 \quad \checkmark \\ & b_3 \in L_2\colon & 3 - 4 + 4 - 3 = 0 \quad \checkmark \end{array}$$

$\boxed{\text{B3}}$ Найдём базис $L_1 \cap L_2$. Запишем в одну систему все уравнения, описывающие L_1 и L_2, и решим полученную систему:

$$\begin{pmatrix} -9 & 26 & 14 & 1 \\ 3 & -4 & -4 & \boxed{1} \end{pmatrix} \overset{C_1 - C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -12 & 30 & 18 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \overset{C_1/(-12)}{\sim}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & -3/2 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \overset{C_2 - 3C_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выразим базисные переменные через свободные:

$$x_1 = \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3, \quad x_4 = -\frac{7}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3.$$

Чтобы построить ФСР, подставим сначала $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, а затем $x_2 = 0$, $x_3 = 2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Проверка</u>:

$$\begin{array}{ll} v_1: & -45 + 52 + 0 - 7 = 0 \quad \checkmark \\ & 15 - 8 + 0 - 7 = 0 \quad \checkmark \\ v_2: & -27 + 0 + 28 - 1 = 0 \quad \checkmark \\ & 9 + 0 - 8 - 1 = 0 \quad \checkmark \end{array}$$

<u>Ответ</u>: v_1, v_2 — базис $L_1 \cap L_2$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$.

$\boxed{\text{B4}}$ Проверим соотношение для размерностей:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dim(L_1 + L_2) & + & \dim(L_1 \cap L_2) & = & \dim L_1 & + & \dim L_2. \\ 4 & + & 2 & = & 3 & + & 3. \end{array}$$

$\boxed{\text{B5}}$ Дополним базис $L_1 \cap L_2$ до базисов в L_1, L_2 и $L_1 + L_2$.
Сначала дополним v_1, v_2 до базиса в L_1:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -7 & \boxed{-1} & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -16 & 0 & -8 & 14 & 2 \\ \boxed{2} & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -14 & 0 & -7 & 9 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{14} & -14 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -9 \\ 0 & 1 & 3/2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда v_1, v_2, a_2 — базис L_1, $a_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2$, $a_3 = -v_1 + 2v_2 - a_2$.
Проверка:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 0 \\ -7/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \\ 3 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix};$$

$$-\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Дополним базис v_1, v_2 до базиса в L_2.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ -7 & \boxed{-1} & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -16 & 0 & 8 & -4 & -8 \\ \boxed{2} & 0 & -1 & -2 & 1 \\ -14 & 0 & 7 & -1 & -7 \\ 7 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{-20} & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 8 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда v_1, v_2, b_2 — базис L_2, $b_1 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2$, $b_3 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$.
Проверка:

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -1 \\ 0 \\ 7/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \\ 3 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 0 \\ -7/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, v_1, v_2, a_2, b_2 — базис в $L_1 + L_2$.