Упорядоченные раскраски

Содержание

1 Кортежи

Введём обозначения:

$$[0,n)_{\mathbb{Z}} = \{0,1,\ldots,n-1\} = \{k \in \mathbb{Z} \colon 0 \leqslant k < n\}.$$
$$\mathcal{T}(n,m) = [0,m)_{\mathbb{Z}}^n = \{a = (a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}) \colon a_i \in [0,m)_{\mathbb{Z}},\ 0 \leqslant i < n\}.$$

Словами: $\mathcal{T}(n,m)$ множество всех кортежей (упорядоченных наборов) длины n с элементами из множества $[0,m)_{\mathbb{Z}}$. Нумерацию элементов начинаем с нуля, как в большинстве языков программирования. Например, $\mathcal{T}(2,3)$ состоит из следующих элементов (перечислим их в лексикографическом порядке):

$$(0,0),\quad (0,1),\quad (0,2),\quad (1,0),\quad (1,1),\quad (1,2),\quad (2,0),\quad (2,1),\quad (2,2).$$

Упражнение 1. Выписать в лексикографическом порядке все элементы множества $\mathcal{T}(n,m)$ для $n=3$, $m=2$; затем для $n=2$, $m=4$.

Упражнение 2. Написать процедуру `output_tuples(n,m)`, которая печатает на экране все элементы $\mathcal{T}(n,m)$ в лексикографическом порядке.

В упражнении 2 рекомендуется использовать вспомогательную рекурсивную процедуру. На языке C её объявление может быть таким:

```
void output_tuples_recur(int* a, int n, int m, int k)
```

Здесь a — массив для хранения кортежа, k — уровень рекурсии. На k-м уровне перебираются значения $a[k]$. При $k = n$ процедура просто выводит на экран элементы массива a.

Тогда нужная процедура `output_tuples` может быть реализована с помощью вызова `output_tuples_recur(a, n, m, 0)`.

2 Упорядоченные раскраски

Введём обозначения: $\mathcal{P}(n, m)$ — множество всех разбиений множества $[0, n)_{\mathbb{Z}}$ на m непустых долей; $\mathcal{P}(n)$ — множество всех разбиений множества $[0, n)_{\mathbb{Z}}$ на непустые доли. Например, $\mathcal{P}(3, 2)$ состоит из следующих элементов:

$$\{\{0, 1\}, \{2\}\}, \qquad \{\{0, 2\}, \{1\}\}, \qquad \{\{0\}, \{1, 2\}\}.$$

Множество $\mathcal{P}(2)$ состоит из следующих элементов:

$$\{\{0, 1\}\}, \qquad \{\{0\}, \{1\}\}.$$

Каждое разбиение удобно хранить как «раскраску», т. е. упорядоченный набор a, в котором a_i понимается как «цвет элемента i», т. е. номер доли, которой принадлежит элемент i.

Каждой раскраске сопоставим разбиение по следующему правилу: элементы попадают в одну долю разбиения, если имеют равные цвета. Например, раскраска $(4, 1, 0, 1, 0, 1)$ соответствует разбиению $\{\{0\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$.

Для каждого разбиения легко подобрать соответствующую раскраску. Рассмотрим, например, разбиение $\{\{0, 2, 3\}, \{1\}, \{4\}\}$, принадлежащее множеству $\mathcal{P}(5, 3)$. Пронумеруем доли числами $0, 1, 2$. Элементы $0, 2, 3$ принадлежат нулевой доле; 1 — доле с номером 1; 4 — доле с номером 2. Получается раскраска $(0, 1, 0, 0, 2)$.

Упражнение 3. Придумать две раскраски, соответствующие одному и тому же разбиению (например, при $n = 5$, $m = 3$).

Раскраску a множества $[0, n)_{\mathbb{Z}}$ будем называть *упорядоченной*, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} &a_0 = 0, \\ &a_i \leqslant \max(a_0, \ldots, a_{i-1}) + 1 \qquad (0 < i < n). \end{aligned}$$

Можно сообразить, что упорядоченные раскраски множества $[0, n)_{\mathbb{Z}}$ *взаимно однозначно* соответствуют разбиениям этого множества.

Упражнение 4. Построить упорядоченную раскраску, которая соответствует разбиению $\{\{4, 2\}, \{0, 5, 1\}, \{3\}\}$.

Научимся перечислять упорядоченные раскраски в лексикографическом порядке. Пример ($n = 3$):

```
(0,0,0)
(0,0,1)
(0,1,0)
(0,1,1)
(0,1,2)
```

Упражнение 5. Перечислить в лексикографическом порядке все упорядоченные раскраски множества $\{0, 1, 2, 3\}$. Проверка: должно получиться 15 раскрасок.

Упражнение 6. Написать процедуру `output_colorings(n)`, которая печатает на экране в лексикографическом порядке все упорядоченные раскраски множества $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Подсказка: написать вспомогательную рекурсивную функцию. В качестве дополнительного параметра рекурсии удобно передавать число цветов, использованных на предыдущих уровнях.

Упражнение 7. Написать процедуру `output_colorings_rank(n,r)`, которая печатает на экране в лексикографическом порядке все упорядоченные раскраски множества $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$, содержащие ровно r цветов. Использовать рекурсию и отсекающие условия (метод ветвей и границ). Например, если $n = 7$, $r = 6$, $k = 4$ и $rcur = 2$ (на предыдущих уровнях рекурсии выбраны цвета элементов $0, 1, 2, 3$, причём использовано только два цвета), то можно не заходить на более глубокие уровни рекурсии.

3 Число разбиений

Через $S(n, r)$ обозначают число разбиений n-элементного множества на r непустых долей. Числа $S(n, r)$ называют *числами Стирлинга второго рода.*

Упражнение 8. Используя процедуру `output_colorings_rank(n,r)`, вычислить значения $S(n, r)$ для $n \leqslant 6$. Для $n \leqslant 3$ должен получиться такой *треугольник Стирлинга*:

```
1
0 1
0 1 1
0 1 3 1
```

Упражнение 9. Вывести рекуррентную формулу для $S(n, r)$. Она похожа на рекуррентную формулу для биноминальных коэффициентов: $S(n, r)$ выражается через $S(n-1, r)$ и $S(n-1, r-1)$.

Через $B(n)$ обозначим число всех разбиений n-элементного множества на непустые доли. Элементы $B(n)$ называют *числами Белла.* Сразу из определений получаем, что

$$B(n) = \sum_{r=0}^{n} S(n, r).$$

Упражнение 10. Используя рекуррентную формулу для $S(n, r)$, вычислить $S(n, r)$ и $B(n)$ для $n \leqslant 10$.

4 Упорядоченные раскраски, заканчивающиеся максимальным элементом

Через $\mathcal{M}(n,r)$ обозначим множество кортежей вида $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$, где $s \leqslant n$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; \\ a_i &\leqslant \max(a_0, \ldots, a_{i-1}) \quad \text{при} \quad 1 \leqslant i < s; \\ a_{s-1} &= r-1. \end{aligned}$$

Элементы множества $\mathcal{M}(n,r)$ можно понимать как куски упорядоченных раскрасок множества $[0,n)_{\mathbb{Z}}$ в r цветов, обрезанные после первого максимального элемента.

Например, $\mathcal{M}(4,3)$ состоит из следующих элементов:

$$(0,0,1,2), \quad (0,1,0,2), \quad (0,1,1,2), \quad (0,1,2).$$

Через $M(n,r)$ обозначим количество элементов множества $\mathcal{M}(n,r)$.

Упражнение 11. Вручную найти $M(n,r)$ при $n \leqslant 5$.

Упражнение 12. Написать программу для перечисления всех элементов множества $\mathcal{M}(n,r)$ в лексикографическом порядке. Использовать рекурсию и отсекающие условия (метод ветвей и границ).

Упражнение 13. Вычислить $M(n,r)$ для $n \leqslant 10$.

Задача. *Найти хорошую рекуррентную формулу для* $M(n,r)$.