

§ 1. Монотонные функции

Всюду далее предполагается, что f — действительнoзначная функция, определённая на некотором невырожденном промежутке X . Промежуток X может быть сегментом, интервалом, полуинтервалом, замкнутым лучом, открытым лучом, всей прямой. Через $\text{int}(X)$ будем обозначать внутренность (множество внутренних точек) множества X . Например, если $X = [a, b]$, то $\text{int}(X) = (a, b)$.

Разделённые разности первого порядка. Для любых различных точек $x_1, x_2 \in X$ положим

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Проверить, что

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1},$$

и $\Delta_f(x_1, x_2)$ не меняется при перестановке аргументов x_1 и x_2 .

Критерий возрастания в терминах разделённых разностей. Следующие условия равносильны:

- (a) f нестрого возрастает на X ;
- (b) $\Delta_f(x_1, x_2) \geq 0$ для любых различных $x_1, x_2 \in X$.

Подумать о геометрическом смысле этого критерия (наклон хорды).

Неравенство Лагранжа (Lagrange) для конечных приращений. Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) .

- (1) Если $f'(x) \geq M$ для любого $x \in (a, b)$, то $\Delta_f(a, b) \geq M$.
- (2) Если $f'(x) \leq M$ для любого $x \in (a, b)$, то $\Delta_f(a, b) \leq M$.

Рекомендуется доказать эти утверждения без использования теоремы Лагранжа.

Правая производная как предел производных. Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) , причём $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = A$, где $A \in \mathbb{R}$. Используя неравенства Лагранжа для конечных приращений, доказать, что правая производная функции f в точке a существует и равна A .

Критерий возрастания в терминах производной. Пусть f непрерывна на X и дифференцируема на $\text{int}(X)$. Тогда следующие условия равносильны:

- (a) f нестрого возрастает на X ;
- (b) $f'(x) \geq 0$ для любого $x \in \text{int}(X)$.

Строгое возрастание, убывание. Сформулировать и доказать критерии того, что функция строго возрастает; нестрого убывает; строго убывает.

Доказательство неравенств с помощью монотонности. Подбирая подходящие монотонные функции, доказать неравенства:

- (1) $e^x \geq 1 + x$ при $x \geq 0$;
- (2) $\ln(1 + x) \leq x$ при $x \geq 0$;
- (3) $a^b > b^a$ при $e \leq a < b$;
- (4) $(1 + x)^p \geq 1 + px$ при $x > -1$, $p > 1$;
- (5) $(1 + x)^p \leq 1 + px$ при $x > -1$, $0 < p < 1$;
- (6) $|\sin x| \leq |x|$ для любого $x \in \mathbb{R}$ (достаточно доказать для любого $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$).

§ 2. Выпуклые функции

Деление отрезка в заданном отношении. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, 1]$. Найти такую точку $x \in [a, b]$, которая делит отрезок $[a, b]$ в отношении $(1 - \lambda) : \lambda$. Указание: составить отношение длины $[a, x]$ к длине $[x, b]$ и выразить x . Чему равно отношение длины $[a, x]$ к длине $[a, b]$?

Координаты точки на хорде графика. Пусть $a, b \in X$, $\lambda \in [0, 1]$. Точка (x, y) лежит на отрезке, соединяющем точки графика функции f с абсциссами a и b . Найти y , если $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$.

Определение выпуклой функции. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и любого $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Неравенство Йенсена (Jensen). Пусть $x_1, \dots, x_n \in X$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ и $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Тогда точка $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ называется *выпуклой комбинацией* точек $x_1, \dots, x_n$. Предполагая, что f выпукла на X , доказать, что

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Разделённые разности второго порядка. Для любых попарно различных точек $x_1, x_2, x_3 \in X$ положим

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Delta_f(x_1, x_3) - \Delta_f(x_2, x_3)}{x_1 - x_2}.$$

Показать, что

$$\begin{aligned} \Delta_f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = \\ &= \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \end{aligned}$$

Вывести отсюда, что $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ не меняется при перестановках аргументов.

Критерий выпуклости в терминах разделённых разностей. Следующие условия равносильны:

- (a) f выпукла на X ;
- (b) для любого $x_1 \in X$ величина $\Delta_f(x_1, x_2)$ нестрого возрастает по x_2 ;
- (c) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ для любых попарно различных $x_1, x_2, x_3 \in X$.

Критерий выпуклости в терминах хорд (секущих). Через $G_f(x)$ будем обозначать точку графика функции f с абсциссой x . Следующие условия равносильны:

- (a) f выпукла на X ;
- (b) для любых $x_1, x_2, x_3 \in X$, таких, что $x_1 < x_2 < x_3$, точка $G_f(x_2)$ лежит не выше прямой, проходящей через $G_f(x_1)$ и $G_f(x_3)$;
- (c) для любых $x_1, x_2, x_3 \in X$, таких, что $x_1 < x_2 < x_3$, точка $G_f(x_3)$ лежит не ниже прямой, проходящей через $G_f(x_1)$ и $G_f(x_2)$;

- (d) для любых $x_1, x_2, x_3 \in X$, таких, что $x_1 < x_2 < x_3$, точка $G_f(x_1)$ лежит не ниже прямой, проходящей через $G_f(x_2)$ и $G_f(x_3)$.

Непрерывность выпуклой функции. Пусть f выпукла на X , и $x_0 \in \text{int}(X)$. Доказать, что f непрерывна в точке x_0 . Указание: рассмотреть такие вспомогательные точки $x_1, x_2 \in X$, что $x_1 < x_0 < x_2$. Между какими прямыми заключён график функции f ?

Используя неравенство Лагранжа для конечных приращений, доказать следующий критерий:

Критерий выпуклости в терминах производной. Пусть f непрерывна на X и дифференцируема на $\text{int}(X)$. Доказать, что следующие условия равносильны:

- (a) f выпукла на X ;
- (b) f' нестрого возрастает на $\text{int}(X)$;
- (c) график функции проходит не ниже любой касательной, проведённой в точках из $\text{int}(X)$.

Критерий выпуклости в терминах второй производной. Пусть f непрерывна на X и дважды дифференцируема на $\text{int}(X)$. Тогда следующие условия равносильны:

- (a) f выпукла на X ;
- (b) $f'' \geq 0$ на $\text{int}(X)$.

Пользуясь этим критерием, доказать выпуклость следующих функций: $f(x) = e^x$ (экспонента), $f(x) = -\ln x$, $f(x) = x^p$ ($x > 0$, $p > 1$).

Строгая выпуклость. Функцию $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называют *строго выпуклой* на X , если для любых $x_1, x_2 \in X$ и любого $\lambda \in (0, 1)$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Переформулировать предыдущие упражнения для строго выпуклых функций.

Вогнутость. Сформулировать определения и критерии вогнутых и строго вогнутых функций.

Доказательство неравенств с помощью выпуклости. Вывести следующие неравенства из выпуклости подходящих выпуклых функций:

- (1) $(a_1 + \dots + a_n)^p \leq n^{p-1}(a_1^p + \dots + a_n^p)$ ($a_i \geq 0$, $p \geq 1$).
- (2) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ($\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$).
- (3) $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$).

§ 3. Неравенства Коши, Юнга, Гёльдера и Минковского

Обобщённое неравенство Коши (Cauchy). Вывести из выпуклости экспоненты, что

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n,$$

где $a_1, \dots, a_n > 0$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Неравенство Коши. Пусть $a_1, \dots, a_n \geq 0$. Тогда

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Применения неравенства Коши. Используя неравенство Коши, доказать:

- (1) $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (a_1, \dots, a_n > 0);$
- (2) $\sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n} \quad (a > 0); \quad \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}};$
- (3) последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает;
- (4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n \quad (x_1, \dots, x_n > 0).$

p-норма. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор из пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, т. е. $x_1, \dots, x_n$ — действительные или комплексные числа, и пусть $p \geq 1$. Величину

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

называют p -нормой вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ и обычно обозначают через $|x|_p$. При $p = 2$ получается обычная евклидова норма (длина вектора). Предполагая, что x — фиксированный ненулевой вектор, доказать, что $|x|_p$ — строго убывающая функция от p на промежутке $[1, +\infty)$. Найти предел $|x|_p$ при $p \rightarrow +\infty$. Эту величину обозначают через $|x|_\infty$.

Сопряжённые показатели. Пусть $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Выразить q через p . Какое значение естественно придавать переменной q при $p = 1$? при $p = +\infty$?

Неравенство Юнга (Jung). Доказать, что

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

где $a, b \geq 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Неравенство Гёльдера (Hölder). Пусть $x, y \in \mathbb{C}^n$; $p \geq 1$, $q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq |x|_p |y|_q.$$

Неравенство Минковского (Minkowski). Пусть $x, y \in \mathbb{C}^n$; $p \geq 1$. Тогда

$$|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p.$$