# Построение базисов в ядре и образе линейного оператора.

Речь пойдёт о построении базисов в ядре и образе линейного оператора. Будут рассмотрены два примера: первый пример — с пояснениями; второй — как образец оформления. Значок $\checkmark$ будет указывать на утверждения, требующие доказательств. Рекомендуется рассматривать эти утверждения как хорошие теоретические задачи для самостоятельного решения. Полный список теоретических задач приведён в конце.

Пусть $L$ — векторное пространство, $A$ — линейный оператор в $L$.

*Ядро* (=*нуль-пространство*) линейного оператора — полный прообраз множества $\{0\}$, т. е. множество всех векторов, которые переводятся линейным оператором в 0:

$$\ker A = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in L \mid Ax = 0\}.$$

*Образ* (=*множество значений*) линейного оператора — множество всех векторов, у которых есть прообразы относительно $A$:

$$\operatorname{im} A = A(L) = \{y \in L \mid \exists x \in L\colon Ax = y\}.$$

Ядро и образ линейного оператора являются подпространствами$^{\checkmark}$.

Например, если $L$ — координатная плоскость (двумерное векторное пространство с базисом $e_1, e_2$) и оператор $A$ проектирует радиус-векторы на ось абсцисс (=на линейную оболочку вектора $e_1$) параллельно оси ординат (=параллельно линейной оболочке вектора $e_2$), то $\ker A$ — ось ординат (линейная оболочка вектора $e_2$), $\operatorname{im} A$ — ось абсцисс (линейная оболочка вектора $e_1$):

$$\ker A = \ell(e_2), \qquad \operatorname{im} A = \ell(e_1).$$

Рассмотрим на примере, как находить базисы ядра и образа линейного оператора, заданного матрицей в некотором базисе.

**Пример 1.** Дана матрица линейного оператора $A$ в базисе $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$:

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \\ 8 & -7 & -3 & 6 \\ 5 & -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Столбцовый способ** основан на следующем принципе: *под координатным столбцом вектора $x$ пишется координатный столбец его образа $Ax$*, т. е. под $x_e$ пишется $(Ax)_e$.

Если отождествлять векторы пространства $L$ с их координатными столбцами в базисе $e$, то можно выразиться короче: *под каждым вектором $x$ пишется его образ $Ax$.*

По условию, известны образы векторов базиса (вспомните определение матрицы оператора). Поэтому сверху пишем единичную матрицу: $E = ((e_1)_e, \ldots, (e_4)_e)$, а снизу — матрицу оператора: $A_e = ((Ae_1)_e, \ldots (Ae_4)_e)$.

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \\ 8 & -7 & -3 & 6 \\ 5 & -5 & -1 & 5 \end{array}\right).$$

Далее будем делать с верхней и нижней матрицами одинаковые столбцовые преобразования, приводящие нижнюю матрицу к столбцово псевдотреугольному виду. Матрица называется *столбцово псевдотреугольной*, если в каждом ненулевом столбце есть ненулевой элемент, правее которого стоят нули.

Переставим местами третий столбец с первым, чтобы $(1,1)$-й элемент нижней матрицы стал равен 1. Выберем этот элемент в качестве ведущего и с помощью столбцовых преобразований «уничтожим» элементы правее него:

$$\underset{\sim}{C^1 \leftrightarrow C^3} \left(\begin{array}{rrrr} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \boxed{1} & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -7 & 8 & 6 \\ -1 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} C^2 + 3C^1 \\ C^3 - 2C^1 \\ C^4 - 4C^1 \end{array}} \left(\begin{array}{rrrr} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -7 & -9 \\ -3 & -16 & 14 & 18 \\ -1 & -8 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

Отметим, что одни и те же столбцовые преобразования проводятся с верхней и нижней матрицами. Поскольку оператор $A$ линейный, то при таких преобразованиях всегда сохраняется основной принцип столбцового способа: под каждым вектором пишется его образ. Например, если в верхней матрице имеются столбцы $x_e$ и $y_e$ (а под ними стоят $(Ax)_e$ и $(Ay)_e$) и мы заменяет $x_e$ на $x_e + \lambda y_e$ и $(Ax)_e$ на $(Ax)_e + \lambda(Ay)_e$, то новый нижний столбец оказывается образом нового верхнего столбца:

$$(Ax)_e + \lambda(Ay)_e = (Ax + \lambda Ay)_e = (A(x + \lambda y))_e.$$

Это легко проверить: если любой верхний столбец умножить слева на матрицу $A_e$, то должен получиться нижний столбец.

Продолжим вычисления. Можно заметить, что в нижней матрице второй, третий и четвёртый столбцы пропорциональны. Умножим третий и четвёртый столбцы на 8, а затем «уничтожим» их с помощью второго:

$$\begin{array}{c} C^3\cdot 8 \\ C^4\cdot 8 \\ \sim \end{array}
\left(\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 8 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & -16 & -32 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\
2 & \boxed{8} & -56 & -72 \\
-3 & -16 & 112 & 144 \\
-1 & -8 & 56 & 72
\end{array}\right)
\begin{array}{c} C^3 + 7C^2 \\ C^4 + 9C^2 \\ C^2\cdot(1/8) \\ \sim \end{array}
\left(\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 8 & 0 \\
0 & 1/8 & 7 & 9 \\
1 & 3/8 & 5 & -5 \\
0 & 0 & 0 & 8 \\
\hline
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\
2 & \boxed{1} & 0 & 0 \\
-3 & -2 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Нижняя матрица приведена к столбцово псевдотреугольному виду: в ненулевых столбцах (1-м и 2-м) есть элементы, правее которых нули.

Обозначим через $v_1$ и $v_2$ векторы пространства $L$, координатные столбцы которых стоят над нулевыми столбцами нижней матрицы:

$$v_1 = 8e_1 + 7e_2 + 5e_3, \qquad v_2 = 9e_2 - 5e_3 + 8e_4,$$

так что

$$(v_1)_e = (8, 7, 5, 0)^T, \qquad (v_2)_e = (0, 9, -5, 8)^T.$$

Ясно, что векторы $v_1$ и $v_2$ принадлежат ядру оператора $A$, так как их образы равны нулю.

Обозначим через $b_1$ и $b_2$ векторы пространства $L$, координатные столбцы которых являются ненулевыми столбцами нижней матрицы:

$$(b_1)_e = (1, 2, -3, -1)^T, \qquad (b_2)_e = (0, 1, -2, -1)^T.$$

Ясно, что $b_1$ и $b_2$ принадлежат образу оператора $A$, так как у них имеются прообразы — векторы с координатными столбцами

$$(0, 0, 1, 0)^T, \qquad (0, 1, 3, 0)^T.$$

**Теорема 1$^\surd$.** *Пусть матрица* $\left(\dfrac{E}{A_e}\right)$ *приведена элементарными столбцовыми преобразованиями к матрице* $\left(\dfrac{X}{Y}\right)$, *где матрица* $Y$ *— столбцово псевдотреугольная. Тогда столбцы матрицы* $Y$ *— координатные столбцы векторов базиса* $\operatorname{im} A$, *а столбцы матрицы* $X$, *стоящие над нулевыми столбцами матрицы* $Y$ *— координатные столбцы векторов базиса* $\ker A$.

$(v_1, v_2)$ — базис $\ker A$, а $(b_1, b_2)$ — базис $\operatorname{im} A$. В частности, найдены размерность ядра (дефект) и размерность образа (ранг): $\dim\ker A = 2$, $\dim\operatorname{im} A = 2$. Заметим, что

$$\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = \dim L.$$

Как сделать проверку? Нужно убедиться в том, что последняя пара матриц удовлетворяет основному принципу: под каждым вектором расположен его образ. Для этого нужно умножать матрицу $A_e$ на верхние столбцы и проверять, получаются ли при этом нижние. Можно сразу умножить матрицу $A_e$ на верхнюю матрицу и убедиться в том, что получилась нижняя:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \\ 8 & -7 & -3 & 6 \\ 5 & -5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1/8 & 7 & 9 \\ 1 & 3/8 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Строчный способ** — приведение матрицы оператора строчными элементарными преобразованиями к строчно псевдодиагональному (=приведённому) виду. При этом одновременно решается однородная система линейных уравнений ($A_e x_e = 0$) и находится базисная подсистема (=максимальная линейно независимая подсистема) системы столбцов матрицы $A_e$. Тем самым находятся базис ядра и базис образа.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & \boxed{1} & 4 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \\ 8 & -7 & -3 & 6 \\ 5 & -5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - 2C_1 \\ C_3 + 3C_1 \\ C_4 + C_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & \boxed{1} & 4 \\ -7 & 8 & 0 & -9 \\ 14 & -16 & 0 & 18 \\ 7 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix} \underset{\sim}{C_2 \cdot (-1/7)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & \boxed{1} & 4 \\ \boxed{1} & -8/7 & 0 & 9/7 \\ 14 & -16 & 0 & 18 \\ 7 & -8 & 0 & 9 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_1 - 2C_2 \\ C_3 - 14C_2 \\ C_4 - 7C_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -5/7 & \boxed{1} & 10/7 \\ \boxed{1} & -8/7 & 0 & 9/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица приведена к строчно псевдодиагональному (=приведённому) виду: в каждой ненулевой строке есть ненулевой ведущий элемент, в столбце которого все остальные элементы нулевые.

1-й и 3-й столбцы, содержащие ведущие элементы, образуют базисную подсистему системы столбцов последней матрицы (они линейно независимы, а 2-й и 4-й столбцы линейно выражаются через 1-й и 2-й). При строчных преобразованиях линейные зависимости между столбцами матрицы не меняются$^{\checkmark}$, поэтому 1-й и 3-й столбцы исходной матрицы $A_e$ образуют базисную подсистему системы её столбцов. Пусть $a_1 = Ae_1$, $a_2 = Ae_3$:

$$(a_1)_e = (2, -8, 8, 5)^T, \qquad (a_2)_e = (1, 2, -3, -1)^T.$$

$(a_1)_e$ и $(a_2)_e$ — базисная подсистема столбцов матрицы $A_e$, поэтому$^{\checkmark}$ $a_1$ и $a_2$ — базис $\operatorname{im} A$.

Система координатных столбцов векторов базиса ядра — это базис пространства решений системы $A_e x_e = 0$, т. е. фундаментальная система решений этой системы.

Последняя матрица соответствует такой системе уравнений:

$$\begin{cases} \phantom{x_1} - \frac{5}{7}x_2 + x_3 + \frac{10}{7}x_4 = 0; \\ x_1 - \frac{8}{7}x_2 \phantom{+ x_3} + \frac{9}{7}x_4 = 0. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{7}x_2 - \frac{9}{7}x_4, \\ x_3 = \frac{5}{7}x_2 - \frac{10}{7}x_4 \end{cases}$$

Сначала подставляем $x_2 = 7$, $x_4 = 0$; затем наоборот: $x_2 = 0$, $x_4 = 7$. Пусть $u_1$ и $u_2$ — векторы из $L$, у которых соответствующие векторы-столбцы:

$$(u_1)_e = (8, 7, 5, 0)^T, \qquad (u_2)_e = (-9, 0, -10, 7)^T.$$

Векторы $v_1$ и $v_2$ образуют базис ядра$^{\checkmark}$.

Проверка состоит из трёх частей:

1) $\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = \dim L$ $(2 + 2 = 4)$;

2) Векторы $a_1$ и $a_2$ линейно независимы, так как матрица

$$((a_1)_e, (a_2)_e) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 2 \\ 8 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

содержит ненулевой минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 8 = 12 \neq 0.$$

3) Векторы $u_1$ и $u_2$ принадлежат ядру $A$:

$$A_e(u_1)_e = 0, \qquad A_e(u_2)_e = 0.$$

Проверяется так:

$$A_e \cdot (u_1, u_2)_e = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \\ 8 & -7 & -3 & 6 \\ 5 & -5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 7 & 0 \\ 5 & -10 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сравним ответы, полученные двумя способами.
Столбцовый способ:

$$\ker A\colon (v_1)_e = (8, 7, 5, 0)^T, \qquad (v_2)_e = (0, 9, -5, 8)^T.$$

$$\operatorname{im} A\colon (b_1)_e = (1, 2, -3, -1)^T, \qquad (b_2)_e = (0, 1, -2, -1)^T.$$

Строчный способ:

$$\ker A\colon (u_1)_e = (8, 7, 5, 0)^T, \qquad (u_2)_e = (-9, 0, -10, 7)^T.$$

$$\operatorname{im} A\colon (a_1)_e = (2, -3, 8, 5)^T, \qquad (a_2)_e = (1, 2, -3, -1)^T.$$

Две системы векторов называются эквивалентными, если векторы второй системы являются линейными комбинациями векторов первой системы, и наоборот.

Убедимся в том, что системы $(v_1, v_2)$ и $(u_1, u_2)$ эквивалентны:

$$\begin{cases} v_1 = u_1, \\ v_2 = (9u_1 + 8u_2)/7; \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = v_1, \\ u_2 = (-9v_1 + 7v_2)/8. \end{cases}$$

Чтобы подобрать коэффициенты, нужно смотреть на нулевые координаты. Системы $(b_1, b_2)$ и $(a_1, a_2)$ также эквивалентны:

$$\begin{cases} b_1 = a_2, \\ b_2 = (-a_1 + 2a_2)/7; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 2b_1 - 7b_2, \\ a_2 = b_1. \end{cases}$$

**Пример 2.** Построить базисы в ядре и образе оператора $A$, действующего в пространстве матриц $M_2(\mathbb{C})$ по правилу

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Выберем в $M_2(\mathbb{C})$ базис

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём образы базисных векторов (матриц) относительно оператора $A$ и разложения этих образов по базису:

$$\begin{aligned}
AE_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3E_2 + 2E_3, \\
AE_2 &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -2E_1 + 4E_2 + 2E_4, \\
AE_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -3E_1 - 4E_3 + 3E_4, \\
AE_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -3E_2 - 2E_3.
\end{aligned}$$

Коэффициенты разложений, записанные по столбцам, образуют матрицу оператора $A$ в базисе $E$:

$$A_E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно сделать частичную проверку, вычислив $AX$ двумя способами для какой-то матрицы $X$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad AX = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 18 & 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 15 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -14 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$(AX)_E = A_E \cdot X_E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ -14 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Проверка сошлась.

Пример 2, столбцовый способ построения базисов в $\ker A$ и $\operatorname{im} A$:

$$
\left(\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & -2 & -3 & 0 \\
3 & 4 & 0 & -3 \\
\boxed{2} & 0 & -4 & -2 \\
0 & 2 & 3 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{c} C^3 + 2C^1 \\ C^4 + C^1 \\ \sim \end{array}
\left(\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & -2 & -3 & 0 \\
3 & 4 & 6 & 0 \\
\boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 3 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{c} C^2/2 \\ \sim \end{array}
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & -1 & -3 & 0 \\
3 & 2 & 6 & 0 \\
\boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{1} & 3 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{c} C^3 - 3C^2 \\ C^3 \cdot 2 \\ \sim \end{array}
\left(\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 4 & 1 \\
0 & 1/2 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & -1 & 0 & 0 \\
3 & 2 & 0 & 0 \\
\boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

Проверка:

$$
\begin{pmatrix}
0 & -2 & -3 & 0 \\
3 & 4 & 0 & -3 \\
2 & 0 & -4 & -2 \\
0 & 2 & 3 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 4 & 1 \\
0 & 1/2 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 \\
3 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Базис ядра:

$$u_1 = E_1 + E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$u_2 = 4E_1 - 3E_2 + 2E_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базис образа:

$$b_1 = 3E_2 + 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$b_2 = -E_1 + 2E_2 + E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2, строчный способ построения базисов в $\ker A$ и $\operatorname{im} A$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{-2} & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} C_2+2C_1 \\ C_4+C_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-2} & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} C_2\cdot(1/3) \\ C_3\cdot(1/2) \end{matrix}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-2} & -3 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{C_3-C_2} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-2} & -3 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ведущие элементы стоят в первом и втором столбце, поэтому базис $\operatorname{im} A$ образуют $AE_1$ и $AE_2$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему уравнений, соответствующих последней матрице. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = -(3/2)x_3, \\ x_1 = 2x_3 + x_4. \end{cases}$$

Подставляем сначала $x_3 = 2$, $x_4 = 0$; затем $x_3 = 0$, $x_4 = 1$:

$$(u_1)_E = (4, -3, 2, 0)^T, \qquad (u_2)_E = (1, 0, 0, 1)^T.$$

Базис ядра образуют матрицы

$$u_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:
1) $\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = 2 + 2 = 4 = \dim M_2(\mathbb{C})$;
2) $a_1$ и $a_2$ не пропорциональны и поэтому линейно независимы;
3) умножая $A_E$ на столбцы $(a_1)_E$ и $(a_2)_E$, получаем нулевые столбцы:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Столбцовый и строчный способы: за и против

Преимущества столбцового способа:

- наглядность и простота проверки на каждом шаге (под каждым вектором записан его образ);
- все вычисления делаются по одной схеме и в конце выписывается готовый ответ (а в строчном способе нужно ещё вычислять ФСР);
- делается лишь прямой ход метода Гаусса (матрица приводится к псевдотреугольному, а не псевдодиагональному виду).

Преимущества строчного способа:

- работа с одной матрицей вместо двух;
- базис образа находится как подсистема векторов $Ae_1, \dots, Ae_n$.

Число арифметических операций в этих способах примерно одинаково: при столбцовом способе приходится проводить вычисления с двумя матрицами, но зато делать лишь прямой ход метода Гаусса.

Рекомендация: если в матрице $A_e$ хорошо видны линейные зависимости между строками, используйте строчный способ; если видны зависимости между столбцами, столбцовый.

## Теоретические задачи и упражнения

Сначала повторим некоторые факты из программы 1-го курса.

### Элементарные преобразования

Матрица называется элементарной, если она получается из единичной в результате элементарного преобразования (строчного или столбцового).

$\boxed{1}$ Строчные преобразования матрицы равносильны умножению слева на элементарные матрицы. Например, строчная трансвекция $C_2 + 3C_3$ равносильна умножению слева на элементарную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а столбцовая трансвекция $C^3 - 5C^1$ равносильна умножению справа на элементарную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку, умножив эти элементарные матрицы на какую-нибудь матрицу, например

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 10 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы, соответствующие следующим элементарным преобразованиям, и сделать численную проверку:

$$C_2 - 8C_1, \quad C_2 \leftrightarrow C_3, \quad C_1 \cdot 5; \quad C^2 + 4^3, \quad C^1 \leftrightarrow C^3, \quad C^2 \cdot (-3).$$

$\boxed{2}$ Элементарные преобразования обратимы. Например, обратным к $C_3 - 4C_1$ является $C_3 + 4C_1$.

$\boxed{3}$ Элементарные преобразования сохраняют линейную независимость: если строки матрицы линейно независимы, то после строчных элементарных преобразований строки останутся линейно независимыми. (Аналогично для столбцов при столбцовых преобразованиях.)

$\boxed{4}$ Элементарные преобразования сохраняют линейную оболочку: если какой-то вектор линейно выражался через строки матрицы, то после строчных элементарных преобразований матрицы этот вектор также линейно выражается через её строки. (Аналогично для столбцов при столбцовых преобразованиях.)

$\boxed{5}$ Если строки матрицы $(m \times n)$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^n$, то после элементарных строчных преобразований строки также образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^n$. (Аналогично для столбцов и пространства $\mathbb{R}^m$ при столбцовых преобразованиях.)

$\boxed{6}$ Строчные элементарные преобразования сохраняют линейные зависимости между столбцами: если какие-то столбцы линейно зависимы, то после строчных преобразований они линейно зависимы; если один столбец линейно выражается через другие, то после строчных преобразований он выражается через столбцы с теми же номерами. (Аналогично для строк и столбцовых преобразований.)

$\boxed{7}$ Строчные элементарные преобразования сохраняют базисную (максимальную линейно независимую) подсистему столбцов: если столбцы $A^{j_1}, \ldots, A^{j_k}$ образуют базисную подсистему столбцов матрицы $A$, то после элементарных строчных преобразований соответствующие столбцы преобразованной матрицы $\tilde{A}^{j_1}, \ldots, \tilde{A}^{j_k}$ образуют базисную подсистему столбцов преобразованной матрицы $\tilde{A}$.

### Псевдотреугольные и псевдодиагональные матрицы

$\boxed{1}$ Если матрица строчно псевдотреугольная, то её ненулевые строки линейно независимы. Если матрица столбцово псевдотреугольная, то её ненулевые столбцы линейно независимы.

$\boxed{2}$ Если матрица строчно псевдодиагональная и в каждой ненулевой строке выбран ведущий элемент, то столбцы, содержащие ведущие элементы, образуют базисную подсистему системы столбцов. Если матрица столбцово псевдодиагональная и в каждом ненулевом столбце выбран ведущий элемент, то строки, содержащие ведущие элементы, образуют базисную подсистему системы строк.

## Векторы и их координатные столбцы

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — фиксированный базис в векторном пространстве $L$.

$\boxed{1}$ Векторы $a_1, \dots, a_k$ линейно зависимы $\iff$ их координатные столбцы $(a_1)_e, \dots, (a_k)_e$ линейно зависимы.

$\boxed{2}$ $b = \sum_{j=1}^{k} a_k \iff b_e = \sum_{j=1}^{k} (a_k)_e$.

$\boxed{3}$ Векторы $a_1, \dots, a_n$ образуют базис $L \iff$ их координатные столбцы $(a_1)_e, \dots, (a_n)_e$ образуют базис $\mathbb{R}^n$.

## Линейные операторы и линейная зависимость

В следующих задачах все векторы принадлежат $L$; $A$ — линейный оператор в $L$.

$\boxed{1}$ $\ker A$ — линейное подпространство $L$.

$\boxed{2}$ Если векторы $v_1, \dots, v_k$ линейно зависимы, то их образы $Av_1, \dots, Av_k$ также линейно зависимы.

$\boxed{3}$ Если векторы $Av_1, \dots, Av_k$ линейно независимы, то $v_1, \dots, v_k$ также линейно независимы.

$\boxed{4}$ Если $x \in \ell(v_1, \dots, v_k)$, то $Ax \in \ell(Av_1, \dots, Av_k)$.

$\boxed{5}$ $\operatorname{im} A$ — линейное подпространство $L$.

$\boxed{6}$ $x - y \in \ker A \iff Ax = Ay$.

$\boxed{7}$ Пусть $a_1, \dots, a_k \in L$, причём $(Aa_1, \dots, Aa_k)$ — базис в $\operatorname{im} A$. Дан вектор $x \in L$. Построить такой вектор $y \in L$, что $x - y \in \ker A$.

$\boxed{8}$ Пусть $(b_1, \dots, b_r)$ — базис $\operatorname{im} A$, $a_1, \dots, a_r$ — такие векторы, что $Aa_1 = b_1, \dots, Aa_r = b_r$ (почему такие векторы существуют?), $z_1, \dots, z_d$ — базис $\ker A$. Доказать, что $(a_1, \dots, a_r, z_1, \dots, z_d)$ — базис $L$.

$\boxed{9}$ Теорема о размерностях ядра и образа:

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim L.$$

Рассмотрим инъективные, сюръективные и биективные операторы. Напомним определения. Оператор $A$

- *инъективный*, если из $Ax = Ay$ следует $x = y$ (для любого вектора существует не более одного прообраза);
- *сюръективный*, если $\operatorname{im} A = L$, т. е. для любого $y \in L$ существует такой $x \in L$, что $Ax = y$ (для любого вектора существует не менее одного прообраза);
- *биективный*, если он инъективный и сюръективный (для любого вектора существует ровно один прообраз).

Как известно, если отображение $A$ обратимо, то для него существует обратное отображение $B$, обладающее свойством $AB = BA = I$, где $I$ — тождественное отображение.

$\boxed{10}$ $A$ инъективен $\iff$ из $Ax = 0$ следует $x = 0$ $\iff$ $\ker A = \{0\}$.

$\boxed{11}$ $A$ инъективен $\iff$ для любой линейно независимой системы векторов $(u_1, \ldots, u_k)$ система векторов $(Au_1, \ldots, Au_k)$ также линейно независима.

$\boxed{12}$ $A$ сюръективен $\iff$ для любой полной системы векторов $(u_1, \ldots, u_k)$ система векторов $(Au_1, \ldots, Au_k)$ также полная.

$\boxed{13}$ Если $A$ — биективный линейный оператор и отображение $B$ обратно к $A$, то $B$ также линейно.

Предыдущие задачи легко обобщить на случай, когда $A\colon L_1 \to L_2$, где $\dim L_1 \neq \dim L_2$. (При этом матрица оператора может быть не квадратной, а прямоугольной.) Следующие утверждения специфичны для «квадратного» случая ($L_1 = L_2$).

$\boxed{14}$ $\det A_e = \det A_f$ для любых базисов $e$ и $f$ (Указание: использовать формулу перехода.) Это позволяет писать просто $\det A$.

$\boxed{15}$ Критерий обратимости линейного оператора. Следующие условия равносильны:

(a) $A$ обратим;

(b) $A$ инъективен ($\ker A = \{0\}$);

(c) $A$ сюръективен ($\operatorname{im} A = L$);

(d) $\det A \neq 0$.

Указание: использовать теорему о размерностях ядра и образа, критерий обратимости матрицы и формулу $(AB)_e = A_e B_e$.

### Подробное обоснование столбцового способа

Пусть проведены столбцовые преобразования:

$$\left(\frac{E}{A_e}\right) \sim \left(\frac{X}{Y}\right),$$

где матрица $Y$ столбцово псевдотреугольная. Без ущерба для общности мы можем и будем считать, что её первые $r$ столбцов $(Y^1, \dots, Y^r)$ ненулевые, а остальные столбцы $(Y^{r+1}, \dots, Y^n)$ нулевые; обозначим через $X^1, \dots, X^r$ и $X^{r+1}, \dots, X^n$ соответствующие столбцы матрицы $X$.

Далее, пусть $v_j$ и $b_j$ — векторы пространства $L$ с координатными столбцами $X^j$ и $Y^j$:

$$(v_j)_e = X^j, \qquad (b_j)_e = Y^j.$$

$\boxed{1}$ Векторы $Y^1, \dots, Y^r$ линейно независимы.

$\boxed{2}$ Векторы $b_1, \dots, b_r$ линейно независимы.

$\boxed{3}$ Если $y \in \operatorname{im} A$, то $y$ линейно выражается через $Ae_1, \dots, Ae_n$.

$\boxed{4}$ Если $y \in \operatorname{im} A$, то $y_e$ линейно выражается через $(Ae_1)_e, \dots, (Ae_n)_e$.

$\boxed{5}$ Если $y \in \operatorname{im} A$, то $y_e$ линейно выражается через $Y^1, \dots, Y^n$.

$\boxed{6}$ $(b_1, \dots, b_n)$ — полная система в $\operatorname{im} A$ (если $y \in \operatorname{im} A$, то $y$ линейно выражается через $b_1, \dots, b_n$).

$\boxed{7}$ $(b_1, \dots, b_r)$ — полная система в $\operatorname{im} A$.

$\boxed{8}$ $(b_1, \dots, b_r)$ — базис в $\operatorname{im} A$.

$\boxed{9}$ Векторы $(e_1)_e, \dots, (e_n)_e$ образуют базис $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{10}$ Векторы $X^1, \dots, X^n$ образуют базис $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{11}$ $(v_1, \dots, v_n)$ — базис $L$.

$\boxed{12}$ Векторы $v_{r+1}, \dots, v_n$ линейно независимы.

$\boxed{13}$ Если $x \in L$ и $Ax = 0$, то $x$ линейно выражается через $v_{r+1}, \dots, v_n$.

$\boxed{14}$ $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ — базис $\ker A$.

В частности, отсюда $\dim \ker A = n - r$, т. е. получено ещё одно доказательство теоремы о размерностях ядра и образа:

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim L.$$

## Подробное обоснование строчного способа

После приведения матрицы $A_e$ к строчно псевдодиагональному виду получили матрицу $M$. Пусть $b_1, \dots, b_n$ — векторы $L$, имеющие координатные столбцы $M^1, \dots, M^n$.

Предположим, что в ненулевых строках $i_1, \dots, i_r$ матрицы $M$ выбраны ведущие элементы $M_{i_1,j_1}, \dots, M_{i_r,j_r}$, равные 1.

$\boxed{1}$ Доказать, что столбцы $M^{j_1}, \dots, M^{j_r}$ образуют базисную подсистему системы $M^1, \dots, M^n$.

$\boxed{2}$ Доказать, что столбцы $(Ae_{j_1})_e, \dots, (Ae_{j_r})_e$ образуют базисную подсистему системы $(Ae_1)_e, \dots, (Ae_r)_e$.

$\boxed{3}$ Доказать, что векторы $Ae_{j_1}, \dots, Ae_{j_r}$ образуют базисную подсистему системы $Ae_{j_1}, \dots, Ae_{j_r}$.

$\boxed{4}$ Доказать, что $(Ae_{j_1}, \dots, Ae_{j_r})$ — базис в $\operatorname{im} A$.

Пусть $d = n - r$, $\{s_1, \dots, s_d\}$ — индексы свободных переменных, так что

$$\{1, \dots, n\} = \{j_1, \dots, j_r\} \cup \{s_1, \dots, s_d\},$$

и столбцы $w_1, \dots, w_d$ построены так, как обычно строится ФСР однородной системы линейных уравнений: для свободных координат с номерами $j = s_q$ выполняются соотношения $(w_p)_{s_q} = \delta_{pq}$, а остальные координаты подбираются так, чтобы $Mw_p = 0$. Обозначим через $u_1, \dots, u_d$ векторы пространства $L$ с координатными столбцами $w_1, \dots, w_d$ (так что $(u_p)_e = w_p$).

$\boxed{5}$ Матрица, составленная из столбцов $w_1, \dots, w_d$, столбцово псевдодиагональная.

$\boxed{6}$ Столбцы $w_1, \dots, w_d$ линейно независимы.

$\boxed{7}$ Векторы $u_1, \dots, u_d$ линейно независимы.

$\boxed{8}$ Если $Mx_e = 0$, то $x_e$ линейно выражается через $w_1, \dots, w_d$ (это нетривиальное утверждение, но доказательство должно быть на первом курсе при обсуждении ФСР).

$\boxed{9}$ Соотношение $Mx_e = 0$ равносильно соотношению $A_e x_e = 0$.

$\boxed{10}$ Если $x \in \ker A$, то $x$ линейно выражается через $u_1, \dots, u_d$.

$\boxed{11}$ $(u_1, \dots, u_d)$ — базис в $L$.

Так как $d = n - r$, получено ещё одно доказательство теоремы о размерностях ядра и образа.