Многочлены от одной переменной. Простейшие свойства в виде теоретических упражнений

Е. А. Максименко

1 марта 2008 г.

Содержание

§ 0. Введение

Это небольшое учебное пособие содержит простые теоретические упражнения по теме «Многочлены от одной переменной». Рассматриваются только многочлены от одной переменной, поэтому далее мы кратко называем их просто многочленами. Будем предполагать, что читателю известны основные определения: многочлен, коэффициенты многочлена, степень многочлена, арифметические операции над многочленами.

Если в задаче не сказано, над каким полем рассматриваются многочлены (т. е. какому полю принадлежат коэффициенты), то подразумевается какое-нибудь поле $\mathbb{F}$. *Числовым полем* называют любое подполе комплексного поля $\mathbb{C}$. Примеры числовых полей: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Простейшим примером нечислового поля является поле из двух элементов: $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

Многочлен, у которого коэффициент с индексом 0 (коэффициент перед нулевой степенью) равен c, а все остальные коэффициенты равны 0, обозначают просто через c. Такие многочлены называют *постоянными* или *константами*. Многочлен, у которого все коэффициенты равны 0, называют *нулевым многочленом*. Остальные постоянные многочлены называют *ненулевыми константами*.

Степень многочлена f обозначают через $\deg(f)$ (от слова degree).

§ 1. Операции сложения и умножения

Упражнения этого подраздела служат для того, чтобы читатель вспомнил определения суммы и произведения многочленов и научился записывать их в формальном виде.

Упражнение 1.1. Пусть

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m, \\ g(z) &= b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Найти коэффициент при z^k многочлена $f + g$ (ответ зависит от соотношений между k, m, n).

Упражнение 1.2. Найти коэффициент перед z^3 в произведении

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2).$$

Упражнение 1.3. Пусть многочлены f и g имеют вид (1.1). Положим $a_j = 0$ при $j > m$ и $b_j = 0$ при $j > n$. Выразить коэффициент при z^k в произведении fg через числа a_j и b_j. Записать ответ с помощью значка суммы, правильно найти пределы суммирования.

Упражнение 1.4. В ответе предыдущей задачи сузить пределы суммирования так, чтобы убрать заведомо нулевые коэффициенты (другими словами, чтобы в ответе не участвовали a_j при $j > m$ и b_j при $j > n$).

Упражнение 1.5. Пусть многочлен f обладает тем свойством, что $fg = g$ для любого многочлена g. Доказать, что f — единичная константа, т. е. многочлен, у которого свободный член равен 1, а все остальные коэффициенты нулевые.

§ 2. Свойства степени

Из определения умножения многочленов следует, что

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g), \qquad \deg(f^n) = n\deg(f).$$

Чтобы распространить эти формулы и на случай нулевых многочленов, полагают $\deg(0) = -\infty$.

Упражнение 2.1. Доказать, что для любого многочлена f над числовым полем (например, над полем $\mathbb{R}$) имеет место следующее предельное соотношение:

$$\deg(f) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln|f(x)|}{\ln|x|}.$$

Эта формула сохраняет смысл и при $f = 0$, если считать, что $\ln 0 = -\infty$.

Упражнение 2.2. Из определения сложения многочленов следует, что

$$\deg(f + g) \leqslant \max(\deg(f), \deg(g)).$$

Выяснить, при каких условиях неравенство будет строгим.

Упражнение 2.3. Говорят, что многочлен f *обратим в кольце многочленов*, если существует такой многочлен g, что $fg = 1$. Доказать, что следующие условия равносильны:

(a) f обратим в кольце многочленов;

(b) $\deg f = 0$;

(c) f — ненулевая константа.

Упражнение 2.4. Доказать, что если $f \neq 0$ и $g \neq 0$, то $fg \neq 0$.

§ 3. Свойства делимости

В этом параграфе буквами f, g, h обозначаются многочлены над полем $\mathbb{F}$.

Говорят, что f *делит* g (или что g *делится на* g) и пишут $f \mid g$, если существует такой многочлен q, что $g = qf$.

Упражнение 3.1. Если $f \mid g$ и $g \mid h$, то $f \mid h$.

Упражнение 3.2. Если $f \mid g$, то $f \mid gh$ для любого многочлена h.

Упражнение 3.3. Если $f \mid g$ и $f \mid h$, то $f \mid (g + h)$.

Упражнение 3.4. Если $f \mid g$ и $f \nmid h$, то $f \nmid (g + h)$.

Упражнение 3.5. Любой многочлен f является делителем нулевого многочлена: $f \mid 0$.

Упражнение 3.6. Если $0 \mid f$, то $f = 0$.

Упражнение 3.7. Если многочлен g делится на любой многочлен f, то он нулевой: $g = 0$.

Упражнение 3.8. Если $\deg(c) = 0$, то $c \mid f$.

Упражнение 3.9. Многочлены f и g будем называть *ассоциированными* и писать $f \sim g$, если существует такая ненулевая константа c, что $f = cg$. Проверить, что это отношение эквивалентности.

Упражнение 3.10. Условие $f \sim g$ равносильно тому, что $f \mid g$ и $g \mid f$.

Будем считать, что читателю знаком обычный алгоритм деления многочленов («деление уголком»). В следующем упражнении предлагается обосновать один шаг этого алгоритма.

Упражнение 3.11. Пусть f и g — многочлены над полем $\mathbb{F}$, причём $g \neq 0$ и $\deg(f) > \deg(g)$. Построить такой номер $n \in \mathbb{N}$ и такое $c \in \mathbb{F}$, что

$$\deg(f - cx^n g) < \deg(f).$$

Упражнение 3.12 (теорема о делении с остатком)**.** Пусть f и g — многочлены над полем $\mathbb{F}$, причём $g \neq 0$. Доказать, что существует единственная пара многочленов q и r, для которой

$$f = gq + r \qquad \text{и} \qquad \deg(r) < \deg(g).$$

Для многочленов q и r из теоремы о делении с остатком используют следующие названия: q — *неполное частное* при делении f на g; r — *остаток* при делении f на g. Остаток r обычно обозначают через $f \bmod g$.

§ 4. Наибольший общий делитель

Многочлен d называют *общим делителем* многочленов f и g, если $d \mid f$ и $d \mid g$. Многочлен d называют *наибольшим общим делителем* многочленов f и g, если d является их общим делителем и делит любой их общий делитель. Множество всех наибольших общих делителей многочленов f и g обозначим через $\mathrm{GCD}(f, g)$ (от слов "greater common divisors").

Упражнение 4.1. Выяснить, какие многочлены являются общими делителями многочленов $f = 0$ и $g = 0$.

Упражнение 4.2. Доказать, что следующие условия равносильны:

(a) $f = 0$ и $g = 0$;
(b) $\mathrm{GCD}(f, g) = \{0\}$;
(c) $0 \in \mathrm{GCD}(f, g)$.

Упражнение 4.3. Пусть $d \in \mathrm{GCD}(f, g)$, $d_1 \sim d$. Тогда $d_1 \in \mathrm{GCD}(f, g)$.

Упражнение 4.4. Пусть $d_1, d_2 \in \mathrm{GCD}(f, g)$. Тогда $d_1 \sim d_2$.

Из 4.3 и 4.4 можно сделать вывод: НОД находится с точностью до ассоциированности. Теперь займёмся вопросом построения НОД.

Упражнение 4.5. $f \in \mathrm{GCD}(f, 0)$ для любого многочлена f.

Упражнение 4.6. Пусть $f \mid g$, $f \neq 0$. Тогда $f \in \mathrm{GCD}(f, g)$.

Упражнение 4.7. Пусть $f = gq + r$. Тогда $\mathrm{GCD}(f, g) = \mathrm{GCD}(g, r)$.

Упражнение 4.8. Пусть $g \neq 0$, $r = f \bmod g$. Тогда $\mathrm{GCD}(f, g) = \mathrm{GCD}(g, r)$.

На результатах 4.8 и 4.5 основан *алгоритм Эвклида*:
Даны многочлены f и g.
$r_{-1} := f$; $r_0 := g$; $k := 0$;
Пока $r_k \neq 0$:
    $r_k = r_{k-2} \bmod r_{k-1}$; $k := k + 1$;
Вернуть r_{k-1}.

Упражнение 4.9. Доказать, что алгоритм Эвклида завершит работу при любых входных многочленах f и g. Найти точную оценку числа шагов (т. е. делений с остатком) через $\deg f$ и $\deg g$.

Упражнение 4.10. Доказать, что результат алгоритма Эвклида (т. е. последний ненулевой остаток) является НОД многочленов f и g.

Итак, мы доказали существование НОД и его единственность с точностью до ассоциированности. Если f и g — многочлены, среди которых хотя один ненулевой, то через $\gcd(f, g)$ будем обозначать тот наибольший общий делитель этих многочленов, у которого старший коэффициент равен 1.

Упражнение 4.11. Пусть $d \in \mathrm{GCD}(f, g)$, $d \neq 0$. Доказать, что d имеет наибольшую степень среди общих делителей f и g.

Упражнение 4.12. Пусть h — общий делитель f и g, имеющий максимальную степень среди всех общих делителей f и g. Доказать, что $h \in \mathrm{GCD}(f, g)$.

Упражнение 4.13. С помощью алгоритма Эвклида доказать существование таких многочленов u и v, что $fu + gv = \gcd(f, g)$.

Упражнение 4.14. Пусть $d \mid f$, $d \mid g$ и существуют такие многочлены u и v, что $fu + gv = d$. Доказать, что $d \in \mathrm{GCD}(f, g)$.

Упражнение 4.15. Пусть $d \in \mathrm{GCD}(f, g)$. Доказать, что $dh \in \mathrm{GCD}(fh, gh)$.

§ 5. Взаимно простые многочлены

Многочлены f и g называют *взаимно простыми*, если $\gcd(f, g) = 1$. Очевидно, это равносильно тому, что общими делителями f и g являются только ненулевые константы.

Упражнение 5.1 (Критерий взаимной простоты)**.** Пусть f, g — многочлены над полем $\mathbb{F}$. Тогда следующие условия равносильны:

(a) $\gcd(f, g) = 1$;

(b) существуют такие многочлены u, v над полем $\mathbb{F}$, что $fu + gv = 1$.

Упражнение 5.2. Если многочлены f и g, из которых хотя бы один ненулевой, поделить на их НОД, то получатся взаимно простые многочлены. Формально: если $d = \gcd(f, g)$, $d \neq 0$, $f = d \cdot f_1$ и $g = d \cdot g_1$, то $\gcd(f_1, g_1) = 1$.

Упражнение 5.3. Пусть $\gcd(f, g) = 1$. Доказать, что $\gcd(f^2, g) = 1$. (Использовать критерий взаимной простоты.)

Упражнение 5.4. Пусть $\gcd(f, g) = 1$. Доказать, что $\gcd(f^m, g^n) = 1$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$.

Упражнение 5.5. Пусть $a, b \in \mathbb{F}$, причём $a \neq b$. Доказать, что многочлены $x - a$ и $x - b$ взаимно простые.

Упражнение 5.6. Пусть $a, b \in \mathbb{F}$, причём $a \neq b$, и пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Доказать, что многочлены $(x - a)^m$ и $(x - b)^n$ взаимно простые.

Следующее утверждение — одно из важнейших свойств взаимно простых многочленов.

Упражнение 5.7. Если $\gcd(f, g) = 1$ и $f \mid gh$, то $f \mid h$.

Упражнение 5.8. Доказать, что $\gcd(f^n, g^n) = \gcd(f, g)^n$.

Упражнение 5.9. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Найти $\gcd(x^m - 1, x^n - 1)$.

§ 6. Разложение на неприводимые сомножители

Пусть f — многочлен над полем $\mathbb{F}$. Говорят, что многочлен f *приводи́м над полем* $\mathbb{F}$ (или *разложи́м над полем* $\mathbb{F}$), если существуют такие многочлены g и h над полем $\mathbb{F}$, что $f = gh$, $\deg(g) \geqslant 1$ и $\deg(h) \geqslant 1$.

Упражнение 6.1. Пусть f и g — многочлены над полем $\mathbb{F}$. Если f неприводим над $\mathbb{F}$ и f не делит g, то $\gcd(f, g) = 1$.

Упражнение 6.2. Пусть f, g, h — многочлены над полем $\mathbb{F}$. Если f неприводим, $f \mid gh$ и f не делит g, то $f \mid h$.

Упражнение 6.3. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ и $g_1, \ldots, g_n$ — неприводимые многочлены над полем $\mathbb{F}$, причём

$$f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_m = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_n,$$

Доказать, что существует такой индекс $k \in \{1, \ldots, n\}$, что $f_1 \sim g_k$.

Упражнение 6.4. Доказать, что разложение на неприводимые сомножители единственно с точностью до порядка сомножителей, если отождествлять эквивалентные многочлены.

Упражнение 6.5. Многочлены степени 1 неприводимы над любым полем.

Отметим несколько утверждений о неприводимых многочленах над полями $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$.

Упражнение 6.6 (Теорема Эйзенштейна)**.** Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

где $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, p — простое число, a_n не делится на p, все остальные коэффициенты делятся на p, но a_0 не делится на p^2. Тогда многочлен f неприводим над полем $\mathbb{Q}$.

Тривиальное указание к доказательству теоремы Эйзенштейна: предположить, будто $f = gh$ (от противного), и рассуждать о делимости на p коэффициентов многочленов g и h.

Упражнение 6.7. Доказать, что многочлен $x^n - p$, где $n \geqslant 2$ и p — простое число, неприводим над полем $\mathbb{Q}$.

Основная теорема алгебры многочленов: любой многочлен степени $\geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень. Из этой теоремы и следствия из теоремы Безу получается, что любой многочлен f степени n $(n \geqslant 1)$ над полем $\mathbb{C}$ можно представить в виде

$$f(z) = c\prod_{k=1}^{n}(z - z_k).$$

Упражнение 6.8. Пусть f — квадратный трёхчлен над полем $\mathbb{R}$ с отрицательным дискриминантом, т. е. $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ и $b^2 - 4ac < 0$. Доказать, что f неприводим над полем $\mathbb{R}$.

Упражнение 6.9. Пусть f — многочлен с действительными коэффициентами, $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = 0$. Доказать, что $f(\bar{z}) = 0$.

Упражнение 6.10. Доказать, что неприводимы над полем $\mathbb{R}$ только многочлены степени 1 и многочлены степени 2 с отрицательным дискриминантом. Показать, что любой многочлен над полем $\mathbb{R}$ можно представить в виде произведения таких многочленов.

Упражнение 6.11. Пусть f и g — многочлены над полем $\mathbb{F}$. Доказать, что если $\gcd(f, g) = 1$, то f и g не имеют общих корней.

Упражнение 6.12. Найти такие многочлены f и g над полем $\mathbb{R}$, что f и g не имеют общих корней, но не являются взаимно простыми.

Упражнение 6.13. Для многочленов над полем $\mathbb{C}$ доказать: $\gcd(f, g) = 1$ $\iff$ f и g не имеют общих корней.

§ 7. Кратные корни

Пусть f — многочлен над полем $\mathbb{F}$, $x_0 \in \mathbb{F}$. Говорят, что x_0 есть *корень кратности k многочлена* f, если $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$, где g — многочлен над полем $\mathbb{F}$ и $g(x_0) \neq 0$.

Упражнение 7.1. Пусть $g \mid f$. Доказать, что если x_0 — корень многочлена g кратности не меньше k, то x_0 — корень многочлена f кратности не меньше k.

Упражнение 7.2. Пусть

$$f(x) = c_0 \prod_{j=1}^{s} (x - x_j)^{k_j} = c_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_s)^{k_s}, \qquad (7.1)$$

где $c_0 \neq 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_s (\in \mathbb{C})$ попарно различны, $k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$. Что можно сказать о корнях f и об их кратностях? Сформулировать и доказать обратное утверждение (над полем $\mathbb{C}$).

Упражнение 7.3. Пусть f имеет вид (7.1). Доказать, что любой многочлен вида

$$g(x) = c_0 \prod_{j=1}^{s} (x - x_j)^{m_j}, \qquad \text{где } m_j \in \{0, 1, 2, \ldots\},\ m_j \leqslant k_j,$$

является делителем f, и любой делитель f имеет такой вид.

Упражнение 7.4. Доказать, что если

$$f(x) = c_0 \prod_{j=1}^{s} (x - x_j)^{k_j}, \qquad g(x) = c_0' \prod_{j=1}^{s} (x - x_j)^{m_j},$$

где $c_0 \neq 0$, $c_0' \neq 0$ и $k_j, m_j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, то $(f, g) = \prod_{j=1}^{s} (x - x_j)^{\min(k_j, m_j)}$.

Производная многочлена $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ — это многочлен

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Для многочленов над числовыми полями это определение согласовано с определением производной функции.

Упражнение 7.5. Для многочленов с числовыми коэффициентами доказать: кратность корня x_0 многочлена f — это наименьший номер k, для которого $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Показать, что это утверждение неверно для многочленов над полем $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

Упражнение 7.6. Пусть f имеет вид (7.1). Доказать, что

$$\gcd(f, f') = \prod_{j=1}^{s} (x - x_j)^{k_j - 1}.$$

§ 8. Число различных нулей многочлена

В этом параграфе мы рассматриваем многочлены над полем $\mathbb{C}$.

Через $\mathrm{nul}(f)$ будем обозначать число различных нулей многочлена f. Если f имеет вид (7.1), то $\mathrm{nul}(f) = s$. Будем считать, что $\mathrm{nul}(0) = -\infty$.

Упражнение 8.1. Доказать, что

$$\mathrm{nul}(f) \leqslant \deg(f),$$

$$\mathrm{nul}(fg) \leqslant \mathrm{nul}(f) + \mathrm{nul}(g), \qquad \mathrm{nul}(f^n) = \mathrm{nul}(f).$$

Упражнение 8.2. Пусть f и g — многочлены над полем $\mathbb{C}$. Выяснить, при каком условии выполняется равенство

$$\mathrm{nul}(fg) = \mathrm{nul}(f) + \mathrm{nul}(g).$$

Упражнение 8.3. Пусть f — многочлен над полем $\mathbb{C}$. Доказать, что

$$\deg(f, f') = \deg(f) - \mathrm{nul}(f).$$

Упражнение 8.4. Доказать, что если $f + g = h$, то условия $\gcd(f, g) = 1$, $\gcd(f, h) = 1$ и $\gcd(g, h) = 1$ равносильны.

Упражнение 8.5. Пусть $f + g = h$. Найти связь между многочленами

$$fg' - f'g, \qquad fh' - f'h, \qquad gh' - g'h$$

и доказать, что они делятся на $\gcd(f, f')$, $\gcd(g, g')$ и $\gcd(h, h')$.

Упражнение 8.6. Доказать, что если $f + g = h$ и $\gcd(f, g) = 1$, то

$$\gcd(f, f')\gcd(g, g')\gcd(h, h') \mid (fg' - f'g).$$

Доказать аналогичное утверждение для $fh' - f'h$ и $gh' - g'h$.

Упражнение 8.7. Оценить $\deg(fg' - f'g)$ сверху через $\deg(f)$ и $\deg(g)$.

Упражнение 8.8 (Mason, Stothers)**.** Пусть $f + g = h$ и $\gcd(f, g) = 1$. Доказать, что

$$\max(\deg(f), \deg(g), \deg(h)) \leqslant \mathrm{nul}(fgh) - 1.$$

Указание: доказать, что $\deg(h) \leqslant \mathrm{nul}(fgh) - 1$. Для $\deg(f)$ и $\deg(g)$ рассуждения аналогичны.

Упражнение 8.9. С помощью теоремы Мэйсона-Стотерса доказать аналог большой теоремы Ферма для многочленов: уравнение $f^n + g^n = h^n$ не имеет нетривиальных решений при $n \geqslant 3$. Тривиальными здесь считаются постоянные решения (они имеются для любого n).

§ 9. Формула Виета

Упражнение 9.1. Найти формулы для коэффициентов многочлена

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Общий случай: если $a_0 = 1$ и

$$\prod_{k=1}^{n}(x - x_k) = \sum_{s=0}^{n} a_{n-s}x^s,$$

то коэффициенты a_s связаны с корнями x_k формулой Виета:

$$a_s = (-1)^s \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}.$$

Упражнение 9.2. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$. Выразить следующие симметрические функции корней через коэффициенты a_1, a_2, a_3:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3, \qquad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}.$$

Упражнение 9.3. Составить многочлен, корни которого обратны корням многочлена

$$x^3 + 2x^2 - 2x + 3.$$

Упражнение 9.4. Для следующего многочлена найти коэффициенты при x^1 и при x^2:

$$(x^2 - 7x + 12)^{10}.$$