# 3-е занятие. Факториал. Метод матем. индукции
# Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Найти функцию, обратную к $\operatorname{ch} x$ при $x \geqslant 0$.

$\boxed{\text{A2}}$ Доказать неравенства: $a \leqslant |a|, \quad -|a| \leqslant a, \quad |a+b| \leqslant |a| + |b|$.

## Факториал

Определение факториала: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Рекуррентная формула: $\boxed{(n+1)! = (n+1) \cdot n!}$

$\boxed{\text{A3}}$ Чему должен быть равен $0!$, чтобы равенство $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ выполнялось и при $n = 0$?

$\boxed{\text{A4}}$ Упростить выражения: $\dfrac{(n+1)!}{n!}, \quad \dfrac{n!}{(n-1)!}, \quad \dfrac{n!}{(n+2)!}, \quad \dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}$.

$\boxed{\text{A5}}$ Выразить следующие произведения через факториалы:
a) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; b) $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$; c) $k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot n$, где $1 \leqslant k < n$.

## Метод математической индукции

Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа $n$ справедливы следующие равенства:

$\boxed{4}$ $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. $\boxed{1}$ $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$\boxed{3}$ $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

$\boxed{7}$ Доказать неравенство Бернулли:

$$\boxed{(1+x)^n > 1 + nx} \quad \text{для любых } x > -1,\ x \neq 0,\ n \geqslant 2.$$

$\boxed{\text{10.1a}}$ Доказать неравенство: $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geqslant 2)$.

$\boxed{\text{A6}}$ Пусть $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$. Найти $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}}$ при $n = 2$ и $n = 3$, угадать общую формулу и доказать её методом матем. индукции.

## Домашнее задание № 3
## Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

Найти обратную функцию и её область определения:

$\boxed{225}$ $y = x^2$; а) $x \in (-\infty, 0]$, б) $x \in [0, +\infty)$.

$\boxed{226}$ $y = \frac{1-x}{1+x}$, $x \neq -1$. $\boxed{228}$ $y = \operatorname{sh} x$. $\boxed{229}$ $y = \operatorname{th} x$.

$\boxed{\text{A1}}$ С помощью неравенства $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ доказать неравенства:

$$|a-b| \leqslant |a| + |b|, \qquad |x-y| \geqslant ||x| - |y||.$$

$\boxed{\text{A2}}$ Упростить: $\dfrac{3!}{6!}$, $\dfrac{7!}{4! \cdot 3!}$, $\dfrac{10!}{8!}$, $\dfrac{(n+2)!}{n!}$, $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$.

$\boxed{\text{A3}}$ Выразить следующие произведения через факториалы:

a) $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$;

b) $k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k)$, где $k \in \mathbb{N}$;

c) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$, где $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$.

Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа $n$ справедливы следующие равенства:

$\boxed{2}$ $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$\boxed{\text{A4}}$ $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

$\boxed{\text{A5}}$ Вычислить сумму $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$ при $n = 1, 2, 3, 4$, угадать общую формулу и доказать её методом матем. индукции.

$\boxed{210}$ Пусть $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Найти $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}}$ при $n = 2$ и $n = 3$, угадать общую формулу и доказать её методом матем. индукции.

$\boxed{6}$ Доказать нестрогое неравенство Бернулли для произведения:

$$(1+x_1)(1+x_2) \cdot \ldots \cdot (1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа одного и того же знака, бóльшие $-1$.

Доказать неравенство методом математической индукции:

$\boxed{10}$ $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.