# 4-е занятие. Степень бинома. Ограниченность
# Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Доказать: $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > 2$ при любом $n \in \mathbb{N}$ (нерав. Бернулли!).

$\boxed{8}$ Доказать неравенство: $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{n}$ при $n > 1$.

**Степень бинома:** $\boxed{(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}$ $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$

$\boxed{\text{A2}}$ Найти $C_n^1$, $C_n^2$, $C_n^3$, $C_n^0$, $C_n^n$.

$\boxed{\text{A3}}$ Построить треугольник Паскаля до $n = 6$.

$\boxed{\text{A4}}$ Возвести в степень: $(x+y)^5$, $(x-2y)^4$.

$\boxed{\text{A5}}$ Найти средний член разложения $(2x^3 - 3y)^4$.

$\boxed{\text{A6}}$ Найти коэффициент при $x^4y^5$ в $(3x^2 - 5y)^7$.

## Ограниченность

Число $B$ называется *верхней границей* для последовательности $\{x_n\}$, если $x_n \leqslant B$ для любого $n$ из $\mathbb{N}$. Число $A$ называется *нижней границей* для последовательности $\{x_n\}$, если $x_n \geqslant A$ для любого $n$ из $\mathbb{N}$. Последовательность $\{x_n\}$ называют *ограниченной*, если для неё существуют конечные верхние и нижние границы.

Доказать ограниченность следующих последовательностей:

$\boxed{\text{A7}}$ $x_n = 2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}$. $\boxed{\text{A8}}$ $x_n = \dfrac{3+\sqrt{n}}{n}$. $\boxed{\text{A9}}$ $x_n = \dfrac{n}{2^n}$.

Найти верхние и нижние границы для $x_n + y_n$, если о последовательностях $x_n$ и $y_n$ известно следующее:

$\boxed{\text{A10}}$ $3 \leqslant x_n \leqslant 5$, $-2 \leqslant y_n \leqslant 1$. $\boxed{\text{A11}}$ $-5 \leqslant x_n \leqslant 0$, $|y_n| < 2$.

Найти верхние и нижние границы для $|x_n + y_n|$, если о последовательностях $x_n$ и $y_n$ известно следующее:

$\boxed{\text{A12}}$ $|x_n| \leqslant 4$, $y_n = 10$. $\boxed{\text{A13}}$ $|x_n| \leqslant 3$, $y_n = -7$.

$\boxed{\text{A14}}$ $4 \leqslant x_n \leqslant 6$, $-3 \leqslant y_n \leqslant 2$. $\boxed{\text{A15}}$ $-5 \leqslant x_n \leqslant 2$, $-4 \leqslant y_n \leqslant -3$.

$\boxed{\text{A16}}$ $3 \leqslant |x_n| \leqslant 10$, $|y_n| \leqslant 2$. $\boxed{\text{A17}}$ $|x_n| \leqslant 5$, $|y_n| \leqslant 2$.

# Домашнее задание № 4
# Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{А1}}$ Пусть $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$. Найти $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}}$ при $n = 2$ и $n = 3$, угадать общую формулу и доказать её методом матем. индукции.

Доказать следующие неравенства методом математической индукции:

$\boxed{\text{10.1б}}$ $n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geqslant 3)$. $\quad \boxed{\text{10.1г}}$ $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

$\boxed{\text{10.1в}}$ $|\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)| \leqslant \sin x_1 + \ldots + \sin x_n \quad (0 \leqslant x_k \leqslant \pi)$.

$\boxed{\text{А2}}$ Доказать формулу: $\boxed{C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}}$.

$\boxed{\text{А3}}$ Возвести в степень: $(2x - 3y^2)^4$.

$\boxed{\text{А4}}$ Найти два средних члена разложения $(3x^2 - y)^5$.

$\boxed{\text{А5}}$ Найти коэффициент при $x^4y^6$ в $(x^2 - 2y^3)^4$.

$\boxed{\text{А6}}$ Найти сумму коэффициентов в разложениях следующих степеней:
a) $(x+y)^n$; b) $(x-y)^n$; c) $(2x+3y)^4$.

Доказать, что следующие последовательности ограничены:

$\boxed{\text{А7}}$ $x_n = 2 - \sin n$. $\quad \boxed{\text{А8}}$ $x_n = 3 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{2}{n^2}$. $\quad \boxed{\text{А9}}$ $x_n = \dfrac{n+5}{3^n}$.

Найти верхние и нижние границы для $x_n + y_n$, если о последовательностях $x_n$ и $y_n$ известно следующее:

$\boxed{\text{А10}}$ $-3 \leqslant x_n \leqslant 1, \quad 2 \leqslant y \leqslant 5$. $\quad \boxed{\text{А11}}$ $|x_n| \leqslant 5, \quad |y_n| \leqslant 2$.

Найти верхние и нижние границы для $|x_n + y_n|$, если о последовательностях $x_n$ и $y_n$ известно следующее:

$\boxed{\text{А12}}$ $x_n = 3, \quad 1 \leqslant y_n \leqslant 4$. $\quad \boxed{\text{А13}}$ $x_n = -5, \quad |y_n| \leqslant 2$.

$\boxed{\text{А14}}$ $-4 \leqslant x_n \leqslant 7, \quad 5 \leqslant y_n \leqslant 6$. $\quad \boxed{\text{А15}}$ $|x_n| \leqslant 5, \quad |y_n| \leqslant 2$.

$\boxed{\text{А16}}$ $3 \leqslant |x_n| \leqslant 7, \quad |y_n| \leqslant 2$. $\quad \boxed{\text{А17}}$ $3 \leqslant |x_n| \leqslant 7, \quad |y_n| \leqslant 4$.

$\boxed{\text{А18}}$ Упростить выражения: $(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$.

$\boxed{\text{А19}}$ Упростить выражение: $(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^n)$.

$\boxed{\text{А20}}$ Упростить выражение: $(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})$.

$\boxed{\text{А21}}$ Вывести формулу для сумму геометрической прогрессии:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \ ? \qquad (q \neq 1).$$