5-е занятие. Повторение. Определение предела
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Пользуясь формулой для степени бинома, вывести формулы понижения для $\operatorname{ch}^3 x$ и $\operatorname{sh}^4 x$.

$\boxed{\text{A2}}$ Пусть $a > 1$. С помощью формулы для степени бинома доказать, что $a^n \geqslant cn^3$ при всех n, где c — некоторое положительное число.

$\boxed{\text{A3}}$ Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{n^3}{1{,}2^n}$ ограничена.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *отграниченной от нуля*, если существует такое число $C > 0$, что $|x_n| \geqslant C$ при всех n.

Доказать, что следующие последовательности отграничены от нуля:

$\boxed{\text{A4}}$ $x_n = 5 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}$. $\boxed{\text{A5}}$ $x_n = -3 + \sin n$.

Определение предела

Пользуясь определением предела, доказать следующие предельные соотношения:

$\boxed{\text{A6}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+1}{2n+5} = 2$.

$\boxed{\text{A7}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-1}{n^2+7n} = 0$.

$\boxed{\text{A8}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-n^3}{2n^3+3n^2} = -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{A9}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, где $|a| < 1$.

$\boxed{\text{A10}}$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 9$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 3$.

Найти пределы, используя арифметические свойства пределов:

$\boxed{\text{A11}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3n+5}{3n^2-7n-8}$.

$\boxed{\text{A12}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} (1+q+q^2+\ldots+q^n)$, где $|q| < 1$.

$\boxed{53}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

Домашнее задание № 5
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Пользуясь формулой для степени бинома, вывести формулы понижения степени для $\operatorname{ch}^4 x$ и $\operatorname{sh}^3 x$.

Доказать, что следующие последовательности отграничены от нуля:

$\boxed{\text{A2}}$ $x_n = 4 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^2}$. $\boxed{\text{A3}}$ $x_n = -5 + \dfrac{2}{n}$. $\boxed{\text{A4}}$ $x_n = -4 + (-1)^n$.

$\boxed{\text{A5}}$ Повторить формулы для $\sin\alpha - \sin\beta$, $\cos\alpha - \cos\beta$.

Определение предела

$\boxed{41}$ Пусть $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$. Построить таблицу зависимости $N(\varepsilon)$ от ε, подставляя $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ 0,0001$.

$\boxed{42}$ Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, указав для всякого $\varepsilon > 0$ такое число $N = N(\varepsilon)$, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$:

а) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; б) $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1} = 0$;

в) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; г) $x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n$.

$\boxed{46}$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10000n}{n^2+1}$. Построить таблицу, как в задаче 41.

Пользуясь определением предела, доказать равенство:

$\boxed{58}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$. (Сначала найти такое $c > 0$, что $2^n > cn^2$ при всех n.)

$\boxed{\text{A6}}$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 2$.

$\boxed{\text{A7}}$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$.

Найти пределы, используя формулы суммирования и арифметические свойства предела:

$\boxed{50}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}$ $(|a| < 1,\ |b| < 1)$.

$\boxed{51}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.