6-е занятие. Предел последовательности
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

Найти пределы, используя арифметические свойства пределов, а затем провести доказательство с помощью определения предела (по любому заданному $\varepsilon > 0$ найти N):

$\boxed{\text{A1}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-5}{n^2+3n+7} = 3.$ $\boxed{\text{A2}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3n+2}{2n^2-3n-7}.$

$\boxed{\text{A3}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n-1}-2^n}{4\cdot 3^n-7}.$

Сравнение роста некоторых последовательностей ($a > 1$, $p > 0$):

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p}=0} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0}$$

Найти пределы, используя арифметические свойства пределов:

$\boxed{\text{A4}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}.$

$\boxed{\text{53}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\ldots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right).$

$\boxed{\text{A5}}$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 9$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 3$.

$\boxed{\text{67 а}}$ Какое выражение больше при достаточно больших n:
а) $100n+200$ или $0,01n^2$?

$\boxed{\text{A6}}$ Доказать, что $1+(-1)^n \not\to 2$.

Найти пределы, используя арифметические свойства пределов:

$\boxed{\text{A7}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3^n}{4\cdot 3^n+n^3}.$ $\boxed{\text{A8}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3\cdot 5^n-2\cdot 3^{2n}}{3^n+n^2}.$

$\boxed{\text{A9}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}).$ $\boxed{\text{A10}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+3n}}.$

$\boxed{\text{A11}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3-1\right).$

Домашнее задание № 6
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

A1 Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 2$.

A2 Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$.

Найти пределы, используя формулы суммирования и арифметические свойства предела:

50 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n} \qquad (|a|<1,\ |b|<1).$

51 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right).$

Найти пределы, используя арифметические свойства пределов, а затем провести доказательство с помощью определения предела (по любому заданному $\varepsilon > 0$ найти N):

A3 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+5n-2}{n^2-2n-5}$. A4 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3-3n}{n^3-4n+1}$. A5 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n}{3^n}$.

67 бв Выяснить, какое выражение больше при достаточно больших n:

б) 2^n или n^{1000}; в) 1000^n или $n!$.

Вычислить пределы:

A6 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)(n+3)(n-4)}{n^3-3n+5}$. A7 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-n\cdot 2^n}{4^n-n^2\cdot 3^n}$.

A8 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(a+\dfrac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\dfrac{n-1}{n}\right)^2\right).$

(Подсказка: раскрыть скобки, разбить слагаемые на три группы и воспользоваться формулами суммирования.)

A9 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$. A10 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

A11 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+3n-1}\right)\right).$

A12 Методом матем. индукции доказать, что $n! > \left(\dfrac{n}{3}\right)^n$ при любом $n\in\mathbb{N}$.

Вывести отсюда, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.