7-е занятие. Предел последовательности
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Вспомнить определение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

$\boxed{\text{A2}}$ Пользуясь определением, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3n}{n+5} = +\infty$.

$\boxed{\text{A3}}$ Доказать, что $1+(-1)^n \not\to 2$.

$\boxed{\text{A4}}$ Доказать, что если $x_n \to a$, где $a \in \mathbb{R}$, то $\sin x_n \to \sin a$.

Вычислить пределы, используя арифметические свойства пределов:

$\boxed{\text{A5}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3-3n}}{n^2}$.

$\boxed{\text{A6}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}-\sqrt[3]{n^3+4n^2}}$.

$\boxed{\text{A7}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 2^n - 3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n + 2\cdot 5^n}$.

$\boxed{\text{A8}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2\cdot 7^n + 7\cdot 5^{2n}}{n^2-10^n}$.

$\boxed{\text{A9}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(n!-(n+1)!)}{(n+1)!+(n+2)!}$.

$\boxed{\text{A10}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^2-3n\sin n)}{1+\ln(n+1)}$.

$\boxed{\text{A11}}$ Сформулировать теорему о пределе произведения ограниченной последовательности на бесконечно малую.

$\boxed{\text{A12}}$ Сформулировать и доказать теорему о пределе произведения бесконечно большой последовательности на последовательность, отграниченную от нуля.

Найти пределы последовательностей x_n:

$\boxed{\text{A13}}$ $x_n = (2+\cos n)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

$\boxed{\text{A14}}$ $x_n = \ln n \cdot (3+(-1)^n)$.

$\boxed{\text{A15}}$ $x_n = \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$.

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности:

$\boxed{\text{A16}}$ $x_1 = \sqrt{1}$, $x_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}$, $x_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$, ...,
$x_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}$.

Домашнее задание № 7
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Сформулировать определения:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

$\boxed{\text{A2}}$ Сформулировать определения:

$$x_n \not\to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty; \qquad x_n \not\to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

$\boxed{\text{A3}}$ Доказать, что если $x_n \to a$, где $a \in \mathbb{R}$, то $\cos x_n \to \cos a$.

Упражнения, отмеченные буквой К, взяты из задачника
Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по матем. анализу. Том 1.

$\boxed{\text{К36}}$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \dfrac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}$; 2) $x_n = \dfrac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}$;

4) $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} \cdot 6^{n+1}}$; 5) $x_n = \dfrac{a^n}{1 + a^n}$, $a \neq -1$.

$\boxed{\text{К39}}$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

3) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2+1}$; 6) $x_n = \dfrac{\lg^2(10n)}{\lg^2 n}$; 7) $x_n = \dfrac{\ln(n^2 - n + 1)}{\ln(n^{10} + n + 1)}$.

$\boxed{\text{К43}}$ Пусть $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.
Найти простую формулу для x_n и доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.
(Подсказка: $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.)

$\boxed{\text{К44, 1)}}$ Найти $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$.

Найти пределы последовательностей x_n:

$\boxed{\text{A4}}$ $x_n = (3 - \cos n) \cdot \dfrac{n}{\ln n}$, $\boxed{\text{A5}}$ $x_n = \cos\sqrt{n^2+3} - \cos\sqrt{n^2+1}$.

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности:

$\boxed{\text{81}}$ $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\ldots$, $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}$.