8-е занятие. Предел последовательности. Повторение
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Пользуясь определением предела, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n - n}{\sqrt{n}+2} = -\infty.$$

Теорема о последовательности, «зажатой» между двумя последовательностями с общим пределом.

Найти пределы последовательностей x_n:

$\boxed{\text{A2}}$ $x_n = \sin \dfrac{n}{n^2+3}$. $\boxed{\text{A3}}$ $x_n = \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$.

$\boxed{\text{A4}}$ $x_n = \cos\sqrt[3]{n^3+2n} - \cos\sqrt[3]{n^3+n}$.

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности, а затем найти её предел:

$\boxed{\text{A5}}$ $x_1 = \sqrt{1}$, $x_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}$, $x_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$, $\ldots$,
$x_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}$.

$\boxed{\text{A6}}$ Сформулировать и доказать теорему о пределе произведения бесконечно большой последовательности на последовательность, отграниченную от нуля.

$\boxed{\text{A7}}$ Найти предел x_n:

$$x_n = (3 + (-1)^n + \cos n)\cdot\frac{n+3}{\ln n + 5}.$$

$\boxed{\text{A8}}$ Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$\boxed{\text{K 1.10}}$ Методом матем. индукции доказать неравенство:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Вычислить сумму S_n и найти $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

$\boxed{\text{A9}}$ $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$. $\boxed{\text{A10}}$ $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$.

$\boxed{\text{A11}}$ $S_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \ldots + \dfrac{n}{3^{n-1}}$.

Домашнее задание № 8
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

A1 Повторить определения:

$$x_n \to a \ (a \in \mathbb{R}), \qquad x_n \to +\infty, \qquad x_n \to -\infty, \qquad x_n \to \infty,$$
$$x_n \not\to a \ (a \in \mathbb{R}), \qquad x_n \not\to +\infty, \qquad x_n \not\to -\infty, \qquad x_n \not\to \infty.$$

Методом математической индукции доказать, что при каждом n из $\mathbb{N}$ верно неравенство:

A2 $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1.$

A3 $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}.$

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности, а затем найти её предел:

81 $x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \ldots, \quad x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}.$

Найти предел последовательности x_n:

К 2.66. 5) $x_n = \dfrac{n - \lg n}{\log_2(4^n+1)}.$ К 2.26. 11) $x_n = \dfrac{n}{2}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}} - 1\right).$

A4 $x_n = \cos\sqrt{n^2+1} - \cos\sqrt{n^2-1}.$

A5 $x_n = \sin\sqrt[3]{n^3+2n} - \sin\sqrt[3]{n^3+4}.$

A6 $x_n = \left(\sin\dfrac{n^2}{n+1} + 5\right) \cdot \dfrac{2^n}{n - \ln n}.$

Вычислить сумму S_n и найти $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

A7 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$ Ответ: $S = \frac{1}{2}$.

A8 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}.$ Ответ: $S = \frac{1}{12}$.

A9 $S_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \ldots + \dfrac{n}{2^{n-1}}.$ Ответ: $S = 4$.

A10 Доказать, что если $a > 0$, то $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Отдельно рассмотреть 3 случая: $a > 1$, $a = 1$ и $0 < a < 1$.