10-е занятие. Определение предела функции. Пределы рациональных выражений Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

(повтор.) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\left(n+\frac{1}{n}\right)-\left(n-\frac{1}{n}\right)\right)$.

(повтор.) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$.

Найти пределы:

A1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$. 412 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

411 Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

A2 Разделить с остатком $f(x)$ на $(x-a)$ (разобрать два способа деления: уголком и с помощью схемы Горнера):

$$f(x)=2x^5-3x^4+x^3-3x+1,\qquad a=2.$$

A3 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2+3x+2}$. A4 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$.

425 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$, где $m,n\in\mathbb{N}$.

414 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, где $m,n\in\mathbb{N}$.

Доказать, пользуясь определением предела функции:

A5 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)=10$.

A6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3}{2x^2-x-1}=-3$.

A7 Сформулировать определения и привести примеры:

$$\lim_{x\to -7} f(x)=-\infty;\qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=5.$$

A8 Доказать, что если $B>0$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$, то существует такое $\delta>0$, что $f(x)>B/2$ при $x\in U_\delta(a)\cap D(f)$.

Домашнее задание № 10
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

Пользуясь определением предела функции, доказать следующие соотношения. Найти δ для $\varepsilon = 0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ 0,0001$.

$\boxed{\text{A1}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{1+x^2} = 0.$ $\boxed{\text{A2}}$ $\lim\limits_{x\to 1}\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = 2.$ $\boxed{401}$ $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4.$

$\boxed{402}$ С помощью определения предела доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$. Найти δ для $E = 10;\ 100;\ 1000;\ 10000$.

$\boxed{406}$ Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения и привести соответствующие примеры:

$$\lim_{x\to a} f(x) = B,$$

где $a = \infty;\ +\infty;\ -\infty$; $B = \infty;\ +\infty;\ -\infty$ (9 случаев).

$\boxed{\text{A3}}$ Доказать, что если $B < 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, то существует такое $\delta > 0$, что $f(x) < B/2$ при $x \in U_\delta(a) \cap D(f)$.

$\boxed{413}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}.$

$\boxed{415}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}.$

$\boxed{418}$ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}.$ $\boxed{419}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}.$

$\boxed{420}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}.$ $\boxed{421}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}.$

$\boxed{424}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$, где $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{426}$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$, где $a \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$.