12-е занятие. Использование эквивалентностей. Замечательные пределы
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{481\text{ а)}}$ Доказать: $\lim\limits_{x\to a}\sin x = \sin a$. $\boxed{475\text{ (из Д. З.)}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

Определение $f \overset{a}{\sim} g$.

$\boxed{\text{Т1}}$ Пусть $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$. Доказать, что

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to a} g(x)\cdot h(x).$$

$\boxed{475\text{ (через }\sim)}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

$\boxed{477}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$. $\boxed{\text{А1}}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

$\boxed{480}$ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. $\boxed{\text{А2}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

$\boxed{483}$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x - \cos a}{x-a}$. $\boxed{485}$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x-a}$.

Второй замечательный предел и некоторые следствия из него

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.}$

$\boxed{\text{А3}}$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}$. $\boxed{\text{А4}}$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

$\boxed{\text{А5}}$ Пусть $f(x)\to 1$ при $x\to a$. Доказать, что

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)(f(x)-1)}.$$

$\boxed{506}$ Найти предел функции $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$ при:
а) $x\to 0$; б) $x\to 1$; в) $x\to +\infty$.

$\boxed{507}$ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$. $\boxed{518}$ $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Домашнее задание № 12
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{481б}$ $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$; $\boxed{481в}$ $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$ $\left(a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right)$.

$\boxed{474.2}$ $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} 3x$. $\boxed{477}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$.

$\boxed{482}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$. $\boxed{484}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$ $\left(a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right)$.

$\boxed{489}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a + 2x) - 2\cos(a + x) + \cos a}{x^2}$.

$\boxed{495}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$. $\boxed{A1}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$. (Ответ: $1/4$.)

$\boxed{501}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$. $\boxed{503}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos\sqrt{x}}$.

$\boxed{505}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\right)$.

Второй замечательный предел

$\boxed{508}$ $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$. $\boxed{511}$ $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

$\boxed{514}$ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$. $\boxed{517}$ $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

$\boxed{519}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{1/\sin x}$. $\boxed{519.1}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{1/\sin^2 x}$.

Повторение

$\boxed{A2}$ Пользуясь определением, доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - x + 4x^2}{4 - x} = \dfrac{1}{2}$.

Повторить вывод следствий из второго замечательного предела!