13-е занятие. Применения II замечательного предела
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

Если $f(x) \to 1$ при $x \to x_0$, то

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)}.}$$

$\boxed{507}$ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$. $\boxed{518}$ $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

$\boxed{\text{A1}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. $\boxed{\text{A2}}$ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{\sin^2 4x}}$.

$\boxed{\text{A3}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos 2x}$. $\boxed{520}$ $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

$\boxed{522}$ $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$. $\boxed{525}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

При $t \to 0$: $\boxed{\ln(1+t)\sim t}$ $\boxed{\log_a(1+t)\sim \frac{t}{\ln a}}$

$\boxed{e^t-1\sim t}$ $\boxed{a^t-1\sim t\ln a}$ $\boxed{(1+t)^\mu-1\sim \mu t}$

$\boxed{\text{A4}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$. $\boxed{\text{A5}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{\ln(1+4x)}$.

$\boxed{\text{A6}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\operatorname{tg} x}$. $\boxed{\text{A7}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{(1+3x)^7-1}$.

$\boxed{\text{A8}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{\cos 4x}-1}{\operatorname{tg}^2 x}$. $\boxed{452}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$.

$\boxed{561}$ а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

$\boxed{\text{A9}}$ Доказать следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{th} x = -1. \qquad \operatorname{sh} x \sim \frac{1}{2}e^x \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

Домашнее задание № 13
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{A1}}$ Повторить вывод следствий из II замечательного предела.

Вычислить пределы:

$\boxed{\text{A2}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\sin 3x}$. $\boxed{\text{A3}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{(1+x)^5-1}$. $\boxed{\text{A4}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1+2x}-1}{\operatorname{tg} 3x}$.

Ответы: $\frac{\ln 2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{21}$.

$\boxed{455}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$.

$\boxed{521}$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$. $\boxed{523}$ $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

$\boxed{524}$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$. $\boxed{526}$ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

$\boxed{527}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}$. $\boxed{528}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

$\boxed{529}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. $\boxed{530}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(x+1)-\ln x)$.

$\boxed{531}$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

$\boxed{532}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin(\ln(x+1))-\sin(\ln x))$.

$\boxed{535}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$. $\boxed{539}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

$\boxed{549}$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0}$ $(a>0)$. Указание: вынести за скобку a^{x_0}.

$\boxed{544}$ $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$. $\boxed{562}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

$\boxed{\text{A5}}$ Доказать следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{th} x = 1. \qquad \operatorname{ch} x\sim\frac{1}{2}e^x \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

$\boxed{\text{A6}}$ Пользуясь определениями ch и sh, доказать формулы:

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y. \qquad \operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y.$$

$$\operatorname{ch}(2x)=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x. \qquad \operatorname{sh}(2x)=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x.$$