15-е занятие. Вычисление пределов
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{\text{547 (из Д. З.)}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$. $\boxed{548}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\alpha} - a^{\alpha}}{x^{\beta} - a^{\beta}}$ $(a > 0)$.

$\boxed{\text{543 (из Д. З.)}}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{x} - a^{a}}{x - a}$ $(a > 0)$.

$\boxed{\text{A1}}$ Пользуясь определениями ch и sh, доказать формулу:

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

$\boxed{533}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$. $\boxed{592}$ $\lim\limits_{x\to +0} x \ln x$.

$\boxed{546}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{n}\right)$. $\boxed{555}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a > 0,\ b > 0)$.

$\boxed{\text{A2}}$ Пусть $f(x) = x^2 + 5x - 3$. «Ограничить $f(x)$ при $x \to 0$», т. е. найти такие $C > 0$ и $\delta > 0$, что для любого x из условия $|x| < \delta$ следует, что $|f(x)| \leqslant C$.

$\boxed{\text{A3}}$ Пусть $f(x) = 2x^2 - 7x - 1$. «Отграничить $f(x)$ от 0 при $x \to 0$», т. е. найти такие $C > 0$ и $\delta > 0$, что для любого x из условия $|x| < \delta$ следует, что $|f(x)| \geqslant C$.

$\boxed{\text{A4}}$ Доказать, пользуясь определением:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 + x - 4} = -\frac{1}{2}.$$

$\boxed{\text{576 а)}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$.

$\boxed{\text{A5}}$ Доказать, что $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \dfrac{x-y}{2} \operatorname{ch} \dfrac{x+y}{2}$.

$\boxed{\text{577.1. а)}}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}{x - a}$.

Замечание о непрерывности функции arcsin.

$\boxed{\text{A6}}$ Доказать, что $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$.

Домашнее задание № 15
Матем. анализ, прикл. матем., 1-й семестр

$\boxed{536}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$. $\boxed{563}$ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

$\boxed{537}$ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$.

$\boxed{540.1}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$.

$\boxed{556}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$ $(a, b, c > 0)$.

$\boxed{568}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} ((x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x)$.

$\boxed{\text{A1}}$ Вывести формулы для $\operatorname{ch} x - 1$ и для $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y$. Подсказка: формулы похожи на тригонометрические, только знаки могут быть другими.

$\boxed{576 \text{ б)}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$. $\boxed{577.1 \text{ б)}}$ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}{x-a}$.

$\boxed{\text{A2}}$ Доказать, что $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$.

$\boxed{\text{A3}}$ Ограничить $f(x)$ при $x \to 0$, т. е. найти такие $C > 0$ и $\delta > 0$, что для любого x из условия $|x| < \delta$ следует, что $|f(x)| \leqslant C$:

$$a)\ f(x) = 4 - x + x^3; \qquad b)\ f(x) = x^2 - 7x + 8.$$

$\boxed{\text{A4}}$ Отграничить $f(x)$ от 0 при $x \to 0$, т. е. найти такие $C > 0$ и $\delta > 0$, что для любого x из условия $|x| < \delta$ следует, что $|f(x)| \geqslant C$:

$$a)\ f(x) = 3 - 2x + 5x^2; \qquad b)\ f(x) = 3x^2 - 5x + 2.$$

$\boxed{\text{A5}}$ Доказать, пользуясь определением предела:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+3x-2}{x^2-5x+1} = -2; \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x-3}{x^2-x+2} = -\frac{3}{2}.$$